

Quasifreie Input-Output-Systeme
in der Quantenoptik

Diplomarbeit
am Institut für Theoretische Physik
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

von
Géza Giedke

November 1996

Es ist mir ein Vergnügen, an dieser Stelle all denen zu danken, die zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein erster Dank gilt meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Kümmerer, für die reizvolle Aufgabenstellung und seine große Ausdauer in ungezählten interessanten, anregenden und kritischen Gesprächen. Seine exzellenten Vorlesungen über Mathematik stellen die Grundlage dar, auf der die Arbeit entstehen konnte, und gehörten vom ersten Semester an zu den Höhepunkten meines Studiums.

Herrn Prof. Dr. Rieckers danke ich für seine Hilfe und das stete Interesse, mit dem er die Arbeit begleitete.

Den Mitgliedern der C^* -AG, insbesondere Juri Hinz, danke ich besonders herzlich für die ständige Bereitschaft, meine Fragen anzuhören und für ihre kompetenten und hilfreichen Antworten. Die vielen Diskussionen in der Arbeitsgruppe haben nicht nur zum Gelingen der Arbeit, sondern auch sehr zum Spaß bei der Arbeit beigetragen.

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Der offene Hohlraumresonator	7
1.1 Der Hohlraumresonator auf dem Fockraum	8
1.2 Die quasifreie Dynamik des Hohlraumresonators	13
1.2.1 Unitäre Dilatationen	13
1.2.2 Zeitentwicklung im Einteilchenraum	15
1.2.3 Zweitquantisierung von U_t , Vergleich mit Abschnitt 1.1.	21
1.3 Streutheorie der quasifreien Zeitentwicklung	26
1.3.1 Streutheoretische Untersuchung von U_t	26
1.3.2 Zweitquantisierung der Wellenoperatoren	34
1.4 Kopplung an mehrere Bäder	42
2 Der offene parametrische Verstärker	47
2.1 Squeezed Light	47
2.2 Der parametrische Resonator auf dem Fockraum	50
2.3 Die symplektische Einteilchen-Zeitentwicklung	54
2.3.1 Der Einteilchen-Hamilton-Operator	54
2.3.2 Die Lösung der Schrödingergleichung	57
2.4 Streutheorie der symplektischen Zeitentwicklung	63
2.4.1 Präliminarien	64
2.4.2 Die symplektischen Wellenoperatoren	66
2.4.3 Streuoperator und Input-Output-Beziehung	69
2.5 Die Zweitquantisierung der symplektischen Zeitentwicklung	70
2.5.1 Die quasifreie Zeitentwicklung	70
2.5.2 Streutheorie und Input-Output-Relation	72
2.5.3 Beispiele	72
3 Weitere Input-Output-Systeme	79
3.1 Reguläre Kopplung	79
3.2 Mehrere Moden	83

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
Zusammenfassung und Ausblick	86
A Die CCR-Algebra	88
B Einteilchendynamik im Frequenzbild	94
Bezeichnungen	96
Literaturangaben	97

Einleitung

In dieser Arbeit werden einige einfache und exemplarische quantenoptische Systeme mit Methoden der mathematischen Physik untersucht.

Input-Output-Systeme

In vielen Experimenten der Quantenoptik hat man es mit Versuchsanordnungen zu tun, die die Form eines *Input-Output-Systems*

$$\text{Input-Kanäle} \text{ --- } \boxed{\text{System}} \text{ --- Output-Kanäle}$$

haben. Dabei wird die betrachtete Anordnung optischer Instrumente – Strahlteiler, Interferometer, optische Hohlräume usw. – und das elektromagnetische Feld zwischen ihnen zusammenfassend als „System“ bezeichnet; die Input- und Output-Kanäle sind in der Regel das freie elektromagnetische Feld, welches das System umgibt.

Ein solches System kann unter drei verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden:

1. Zum einen kann man das *System als optisches Instrument* ansehen. In dieser Betrachtungsweise hat der Experimentator den Input unter Kontrolle und eine theoretische Beschreibung des Systems soll die Frage beantworten, zu welchem Output ein gegebener Input führt. Ein einfaches Beispiel für diese Sichtweise ist ein Frequenzfilter: Man fragt sich, wie der Filter einen bekannten Input modifiziert, etwa um den modifizierten Strahl dann als Input eines weiteren Experiments zu verwenden.
2. In einer anderen Situation kann das *System Objekt der Messung* sein. In diesem Fall muß wieder der Input präpariert werden, und man will aus dem gemessenen Output auf den Zustand des System (oder das System beschreibende Parameter) zurückschließen. Der Input ist also gewissermaßen der Abtaststrahl, mit dem das System untersucht wird.

3. Schließlich kann man auch das *System als Meßgerät* ansehen. Dazu muß man den Zustand des Systems präparieren können. Der Input ist dann das zu untersuchende Objekt. Die theoretische Beschreibung sollte es dann ermöglichen, vom gemessenen Output auf den Input zurückzuschließen. Ein Interferometer ist ein einfaches Beispiel für diese Sichtweise.

Zur Beschreibung derartiger Systeme im Rahmen der Quantenoptik wurde von GARDINER und COLLET der *Input-Output-Formalismus* entwickelt (siehe [3, 1]). Das betrachtete System wird auf die in der Quantenoptik übliche Weise beschrieben: Der System-Hilbertraum ist der symmetrische Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ über dem *Testfunktionenraum* \mathcal{H} der zulässigen Moden des elektromagnetischen Feldes. Motiviert durch einige phänomenologische Überlegungen wird ein Hamilton-Operator angesetzt. Die Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung ermöglicht es dann, eine Beziehung zwischen den Observablen des Input- und des Output-Feldes herzuleiten und somit die Erwartungswerte dieser aus der Kenntnis jener vorherzusagen. Das Standardbeispiel für den Input-Output-Formalismus ist der offene eindimensionale Hohlraumresonator (Abb. 1, S. 7): Input- (bzw. Output-) Kanäle sind die einlaufenden (bzw. auslaufenden) elektromagnetischen Wellen, das System ist das Feld im Hohlraum.

In der physikalischen Literatur zur Quantenoptik wird fast ausschließlich der Fockraum-Formalismus verwendet, er umfaßt jedoch bei weitem nicht alle Phänomene, die ein quantenoptisches System zeigen kann. Als ein geeigneterer Rahmen zur Beschreibung quantenoptischer Systeme hat sich die *operatoralgebraische* Formulierung der Quantenmechanik erwiesen.

Operatoralgebraische Quantenmechanik

In der traditionellen Quantenmechanik ist der erste Schritt bei der Beschreibung eines Systems die Angabe des System-Hilbertraums \mathcal{H} . Die Observablen des Systems sind dann durch die selbstadjungierten Operatoren auf \mathcal{H} , die Zustände durch die Spurklasseoperatoren auf \mathcal{H} gegeben. Die Zeitentwicklung eines Systems wird (im Schrödingerbild) durch eine unitäre Gruppe auf \mathcal{H} beschrieben. Der Erwartungswert der Messung einer Observablen A im Zustand ρ wird durch Spurbildung berechnet und ist gegeben durch $\text{tr}(\rho A)$.

Die operatoralgebraische Beschreibung geht dagegen von den Observablen aus, die rein algebraisch durch ihre Vertauschungsrelationen charakterisiert werden und eine Operatoralgebra bilden. Die Zustände des Systems werden dann durch die normierten positiven linearen Funktionale auf der Observablenalgebra beschrieben, die Zeitentwicklung (im Heisenbergbild) durch eine

Automorphismengruppe auf der Algebra. Der Erwartungswert der Messung einer Observablen A im Zustand φ ist durch $\varphi(A)$ gegeben.

Gegenüber der Hilbertraum-Formulierung hat die operatoralgebraische Beschreibung einige Vorteile:

- Sie bietet eine viel reichhaltigere Struktur. Das ermöglicht es, Systeme mit endlicher und unendlicher Teilchenzahl, mit rein quantenmechanischen und mit makroskopisch-klassischen Eigenschaften in einem einheitlichen Formalismus zu behandeln.

Den Hilbertraum-Formalismus erhält man als Spezialfall, wenn man bestimmte Darstellungen der Observablenalgebra betrachtet.

- In der operatoralgebraischen Formulierung stehen die physikalisch fundamentalen Unschärferelationen am Anfang der mathematischen Beschreibung. Um die Schwierigkeiten, die mit dem oft unbeschränkten Spektrum der möglichen Meßwerte einhergehen, zu vermeiden, werden oft statt der fundamentalen Observablen die von diesen generierten unitären Gruppen und deren Vertauschungsrelationen als Ausgangspunkt der Beschreibung gewählt.
- Trotz des aufwendigeren mathematischen Apparats gibt es spezielle Systeme, für die die operatoralgebraische Vorgehensweise einfacher ist als der Fockraum-Formalismus.

Die CCR-Algebra

Für ein Bosonensystem wie das elektromagnetische Feld ist die *Algebra der kanonischen Vertauschungsrelationen* $CCR(\mathcal{H})$ die geeignete Operatoralgebra. Sie wird erzeugt von den *Weyloperatoren* $W(f)$, $f \in \mathcal{H}$, die die *Weylschen Vertauschungsrelationen* $W(f)W(g) = e^{-i2\sigma(f,g)}W(g)W(f)$ erfüllen. Der Raum \mathcal{H} , der die Weyloperatoren indiziert, wird als *Einteilchenraum* bezeichnet. Oft ist \mathcal{H} ein (Prä-)Hilbertraum und die Bilinearform σ der Imaginärteil des Skalarprodukts auf \mathcal{H} . Man kann sich \mathcal{H} als den Hilbertraum eines Ein-Boson-Systems vorstellen und $CCR(\mathcal{H})$ als die Observablen des Bosonensystems mit unbestimmter Teilchenzahl.

Eine wichtige (weil besonders einfache) Klasse von Zeitentwicklungen auf $CCR(\mathcal{H})$ sind die *quasifreien Dynamiken*. Eine quasifreie Dynamik ist durch eine unitäre oder symplektische Gruppe auf dem Einteilchenraum \mathcal{H} gegeben. Durch den Funktor der *kanonischen Zweitquantisierung* läßt sich jeder solchen Einteilchen-Zeitentwicklung eindeutig ein C^* -Algebra-Automorphismus zuordnen, der die quasifreie Dynamik des Vielteilchensystems beschreibt.

Für die Untersuchung quasifreier Systeme auf $CCR(\mathcal{H})$ stehen damit die zahlreichen, gut ausgearbeiteten Methoden zur Verfügung, die zur Behandlung dynamischer Systeme auf Hilberträumen entwickelt wurden.

Die Untersuchung einiger quasifreier Dynamiken auf $CCR(\mathcal{H})$ steht im Zentrum dieser Arbeit. Dabei finden im folgenden vor allem die *Hilbertraum-Streutheorie* nach LAX und PHILLIPS und die Ergebnisse von KÜMMERER und SCHRÖDER über *unitäre Dilatationen* (die Erweiterungen dissipativer zu unitären Dynamiken darstellen) Anwendung.

Der Inhalt dieser Arbeit

In [7] wurde gezeigt, daß das von Collett und Gardiner verwendete Modell des offenen Hohlraumresonators zu einer quasifreien Dynamik führt, und daß die Zeitentwicklung auf dem Testfunktionenraum durch die *unitäre Dilatation* der Halbgruppe $e^{-\lambda t}$ gegeben ist. Das ermöglichte eine *streutheoretische* Ableitung der Input-Output-Relationen.

In dieser Arbeit wird im ersten Kapitel ebenfalls der offene Hohlraumresonator betrachtet, da sich an diesem einfachen Beispiel die im folgenden verwendeten Begriffe und Methoden am besten einführen lassen. Zunächst wird die Beschreibung im Fockraum-Formalismus skizziert, und dann die in [7] gegebene quasifreie Beschreibung ausführlich referiert und an einigen Punkten ergänzt.

Im zweiten Kapitel geht es um den *optischen parametrischen Resonator (OPR)*. Dabei handelt es sich im wesentlichen um einen mit einem nichtlinearen Kristall gefüllten Hohlraumresonator, der durch einen intensiven Strahl der doppelten Resonatorfrequenz angetrieben wird. Dieses System ist von Bedeutung, da es sich zur Erzeugung einer interessanten Klasse von Zuständen des elektromagnetischen Feldes, der *gequetschten Zustände (squeezed states)*, besonders gut eignet.

Als „gequetscht“ werden Zustände bezeichnet, in denen die Schwankung einer Observablen kleiner ist, als in einem Referenzzustand. Die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit der Nichtlinearität des Kristalls im OPR führt zur Entstehung von Zuständen, in denen bestimmte Feldobservablen eine geringere Schwankung als im Vakuum aufweisen. Durch die Verwendung solcher Zustände verspricht man sich z.B. größere Genauigkeit in Interferometerexperimenten.

Der parametrische Resonator läßt sich unter geeigneten Modellannahmen ebenfalls durch eine quasifreie Dynamik beschreiben. Deren Bestimmung und streutheoretische Untersuchung bilden den Hauptteil des zweiten Kapitels.

Im Anhang findet sich eine Zusammenstellung der für die CCR-Algebra wesentlichen Begriffe und Definitionen und ein Verzeichnis der verwendeten Notation.

Kapitel 1

Der Input-Output-Formalismus am Beispiel des Hohlraumresonators

Das einfachste zusammengesetzte System der Quantenoptik besteht aus einem Hohlraumresonator, der durch einen teilweise durchlässigen Spiegel an das umgebende elektromagnetische Feld gekoppelt (und am anderen Ende durch einen perfekten Spiegel abgeschlossen) ist.

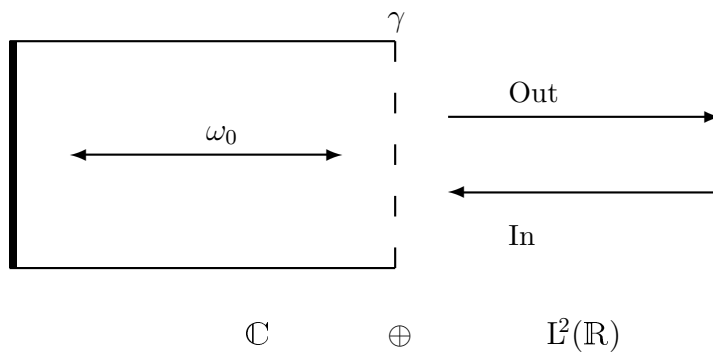


Abbildung 1.1: Der einseitig offene Hohlraumresonator

Da dieses System für den Input-Output-Formalismus in vieler Hinsicht beispielhaft ist, soll es hier ausführlich besprochen werden. Zunächst wird die

in der physikalischen Literatur (z.B. [3], [2], Kapitel 7 oder [1], Abschnitte 5.3 und 10.2) übliche Behandlung referiert. In [7] wird eine mathematisch rigorose Beschreibung dieses Systems durch eine quasifreie Dynamik auf einer geeigneten CCR-Algebra angegeben, die hier mit einigen Ergänzungen im Abschnitt 1.2 dargestellt wird.

1.1 Die Dynamik des Hohlraumresonators auf dem Fockraum

Zur Beschreibung des in Abb. 1 dargestellten Systems wird in der physikalischen Literatur ein durch Felderzeuger und -vernichter ausgedrückter Hamilton-Operator \mathbb{H} auf einem (meist nicht explizit angegebenen) symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ aufgestellt.

Der Hilbertraum eines zusammengesetzten Systems ist das Tensorprodukt der Hilberträume der beiden Teilsysteme, also ist $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_s) \otimes \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_b) \cong \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_b)$. Es zeigt sich, daß $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}$ und $\mathcal{H}_b = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ ist. In dieser Wahl des *Einteilchenraums* \mathcal{H} finden implizit schon einige Modellannahmen Ausdruck, die am besten zusammen mit dem Modell-Hamilton-Operator erläutert werden.

Der Hamilton-Operator

Es soll hier nicht versucht werden, Hamilton-Operator (und Einteilchenraum) durch kanonische Quantisierung der klassischen Elektrodynamik des im Abb. 1 dargestellten Systems herzuleiten. Es werden nur einige Überlegungen zusammengestellt, die das verwendete Modell motivieren. Gerechtfertigt wird die Wahl des Modells letztlich durch den (qualitativen oder numerischen) Erfolg.

Der Hamilton-Operator \mathbb{H} des zusammengesetzten Systems wird als Summe der Hamilton-Operatoren des Systems, der Umgebung und der Kopplung, \mathbb{H}_S , \mathbb{H}_B und \mathbb{H}_K geschrieben.

Der Hamilton-Operator des Objektsystems

Die erste Modellannahme ist, daß im Hohlraumresonator nur die Mode der Frequenz ω_0 schwingt. Dann ist das System im wesentlichen ein eindimensionaler harmonischer Oszillator der Frequenz ω_0 . Folglich ist $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_s) =$

$\ell^2(\mathbb{N}) \cong \mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ und $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}$ der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators:

$$\mathbb{H}_{\mathcal{S}} = \hbar\omega_0 a^\dagger a,$$

wobei a^\dagger der Erzeuger und a der Vernichter einer Oszillatormode ist. (In der Schreibweise des nächsten Abschnitts: ein Vernichter zur Testfunktion $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$.)

Der Hamilton-Operator der Umgebung

Der Hamilton-Operator des freien elektromagnetischen Feldes wird unter Verwendung der Erzeuger-/Vernichterdichten $b^\dagger(\omega), b(\omega)$ („Erzeuger bzw. Vernichter einer Mode der Frequenz ω “, d.h. einer Mode der „Testfunktion“ $(\delta_{(\omega'-\omega)}^0)$; $[b(\omega), b^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$) geschrieben als:

$$\mathbb{H}_{\mathcal{B}} = \hbar \int_{\mathbb{R}} \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) d\omega.$$

Das heißt, es wird nur eine Dimension und eine Polarisationsrichtung des umgebenden Feldes betrachtet. Zwei weitere Besonderheiten dieses Hamilton-Operators bedürfen einer Erklärung: zum einen die negativen Frequenzen und das beidseitig unbeschränkte Spektrum, zum anderen das Auftreten von nur einer Mode zu jeder Frequenz (statt der zu erwartenden zwei für die beiden Impulsrichtungen).

Die Integration auch über negative Frequenzen wird mit dem „Übergang in ein mit der hohen (optischen) Frequenz ν rotierendes Koordinatensystem“ gerechtfertigt. Frequenzen werden dann relativ zu ν gemessen und es wird eine Art „Renormierung“ des Hamilton-Operators vorgenommen, nach der einem Photon der Frequenz ω nicht mehr die Energie $\hbar\omega$ sondern die Energiedifferenz $\hbar(\omega - \nu)$ zukommt. Diese Verschiebung des Frequenz-Nullpunktes macht aus dem üblichen Integral über \mathbb{R}^+ eines über $[-\nu, \infty)$. Da ν sehr groß ist, wird dann gleich über ganz \mathbb{R} integriert. Zulässig ist das, solange die betrachteten Zustände und Observablen nur auf einem schmalen Band um die Frequenz ν herum „leben“ (Schmalbandapproximation).¹

Daß zu jeder Frequenz nur je eine Mode auftritt, hängt mit der Wahl von $L^2(\mathbb{R})$ statt $L^2(\mathbb{R}^+)$ als Einteilchenraum zusammen: die kanonische Wahl² des Einteilchenraums \mathcal{H}_b ist der Raum, der von den Lösungen der eindimensionalen Maxwellgleichungen im betrachteten Gebiet des \mathbb{R}^3 (also hier der

¹Damit $\mathbb{H}_{\mathcal{S}}$ und $\mathbb{H}_{\mathcal{B}}$ konsistent sind, muß dann auch ω_0 auf die verschobene Frequenzskala bezogen werden. Am besten wählt man $\nu = \omega_0$ und der Systemhamiltonian verschwindet.

²vgl. z.B. [15], Kapitel 3

positiven reellen Achse) aufgespannt wird. In der Coulomb-Eichung und bei fester Polarisation sind die eindimensionalen Maxwellgleichungen äquivalent zur eindimensionalen Wellengleichung. Ihre Lösungen sind also die ein- und auslaufenden Wellen auf dem \mathbb{R}^+ . Stattdessen betrachtet man nun auf der ganzen reellen Achse nur die von links nach rechts laufenden Wellen, d.h. man läßt sie von links ein- und nach rechts auslaufen. Diese Transformation führt zu einer besonders einfachen Dynamik auf dem Einteilchenraum: dem Rechtsshift. Mathematisch sind diese Beschreibungen nicht äquivalent, denn die Transformation ist nicht unitär. Auch physikalisch scheint etwas verloren zu gehen: während im ursprünglichen Bild ein- und auslaufende Wellen interferieren konnten, ist die nun nicht mehr der Fall. In der Schmalbandnäherung ist dies jedoch kein Problem, denn die Interferenzterme oszillieren dann mit der sehr hohen Frequenz 2ν und sind daher praktisch ohnehin nicht beobachtbar.

Diese Modifikation der Dynamik entspricht der Verwendung von $-i\frac{d}{dx}$ statt $\sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}$ als Einteilchen-Hamilton-Operator (vgl. Abschnitt 1.2) des freien Feldes. Sie wird durch die oben beschriebene „Renormierung“ des Hamilton-Operators erreicht. Dieser Ansatz für \mathbb{H}_B und \mathcal{H}_b entspricht der Modellierung der Umgebung durch *weißes Rauschen*.

Der Hamilton-Operator der Kopplung

Die Kopplung zwischen Bad- und System wird linear in den System- und Badoperatoren angesetzt: $\mathbb{H}_K = i\hbar \int_{\mathbb{R}} \kappa(\omega)(ab^\dagger(\omega) - a^\dagger b(\omega)) d\omega$, das heißt, es werden nur Prozesse betrachtet, bei denen sich die Photonenzahl im Bad und im System nur um je eins ändert. Im Falle schwacher Kopplung (einer geringen Durchlässigkeit des Spiegels) ist das eine gute Näherung³.

Daß in \mathbb{H}_K keine Produkte von zwei Erzeugern oder zwei Vernichtern auftreten ist Folge der *Drehwellennäherung* („rotating wave approximation“). In dieser Näherung werden die antiresonanten Terme $a^\dagger b^\dagger(\omega)$ und $ab(\omega)$ im Integranden vernachlässigt. Da diese Ausdrücke Prozesse beschreiben, die die Energieerhaltung in hohem Maße verletzen, ist es plausibel, daß sie keinen wesentlichen Beitrag zur Dynamik leisten.⁴ Erst in der Drehwellennäherung

³Schon daß man überhaupt von einem *Resonator* mit wohldefinierter Grundfrequenz spricht, impliziert eine schwache Kopplung. Als einen typischen Wert für in der Laserphysik übliche Hohlraumresonatoren nennt z.B. CORNEY, *Atomic and Laser Spectroscopy*, Clarendon Press, Oxford, 1988 $|\kappa|^2 \approx 0.02$ (vgl. dazu die Rechnung am Ende von Abschnitt 1.2.3)

⁴Man kann die Drehwellennäherung auch folgendermaßen motivieren: Da die Kopplung zwischen System und Umgebung schwach ist, ist die Zeitentwicklung der Operatoren

kann die Integration auch in \mathbb{H}_K über ganz \mathbb{R} ausgedehnt werden, da die hinzukommenden Terme dann alle antiresonant sind und folglich keine Rolle spielen. Es zeigt sich, daß die vom so genäherten Hamilton-Operator \mathbb{H} generierte Zeitentwicklung *quasifrei* ist.

In der Regel wird die Kopplung κ noch als frequenzunabhängig angenommen: $\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}$. Diese Näherung wird auch als *Markov-Näherung* bezeichnet. Somit ergibt sich:

$$\mathbb{H}_K = i\hbar \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (ab^\dagger(\omega) - a^\dagger b(\omega)) d\omega.$$

Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \mathbb{H}_S + \mathbb{H}_B + \mathbb{H}_K \\ &= \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar \int_{\mathbb{R}} \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) d\omega \\ &\quad + i\hbar \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (ab^\dagger(\omega) - a^\dagger b(\omega)) d\omega. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Der Definitionsbereich von \mathbb{H} wird in der Literatur nicht angegeben. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß \mathbb{H} Zweitquantisierung eines dicht definierten selbstadjungierten Operators $(H, \mathcal{D}(H))$ auf \mathcal{H} ist, dessen Definitionsbereich $\mathcal{D}(H)$ in Gl. (1.10) angegeben wird. Also ist \mathbb{H} auf dem dichten Teilraum

$$\mathcal{D}(\mathbb{H}) := \{(f_0, f_1, f_2, \dots) \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) : f_n \in \odot^n \mathcal{D}(H) \text{ mit } f_n = 0 \text{ außer endlich vielen}\}$$

definiert. ($\odot^n \mathcal{D}(H)$ ist das n -fache algebraische Tensorprodukt von $\mathcal{D}(H)$.)

Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen $i\frac{d}{dt}A = [A, \mathbb{H}]$ für $b(\omega)$ und a sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t) &= -i\omega_0 a(t) - \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} b_t(\omega) d\omega, \\ \frac{d}{dt}b_t(\omega) &= -i\omega b_t(\omega) + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} a(t). \end{aligned}$$

$a, b(\omega)$ im wesentlichen durch die ungestörte Evolution gegeben: $a(t) \approx a(0)e^{-i\omega_0 t}$ und $b_t(\omega) \approx b_0(\omega)e^{-i\omega t}$. Die vernachlässigten Terme oszillieren also mit der sehr hohen Frequenz $\pm(\omega_0 + \omega)$ und mitteln sich schon nach extrem kurzer Beobachtungszeit weg.

Gibt man sich für die zweite Gleichung zur Zeit t_0 (die in der Regel in der fernen Vergangenheit liegt) die Anfangsbedingung $b_{t_0}(\omega)$ vor und setzt die Lösung in die erste Gleichung ein, so erhält man unter Verwendung der Vertauschungsrelationen eine Langevin-Gleichung für a , die die Zeitentwicklung der Systemoperatoren für $t > t_0$ beschreibt:

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) - \frac{\gamma}{2}a(t) - \sqrt{\gamma}a_{in}(t). \quad (1.2)$$

Dabei ist $a_{in}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t-t_0)} b_{t_0}(\omega) d\omega$ ($t > t_0$) durch die vorgegebene Anfangsbedingung bestimmt. Der Input-Operator $a_{in}(t)$ beschreibt den Einfluß der Umgebung auf den Hohlraumresonator. Da $b(\omega)$ „Vernichter einer ebenen Welle der Frequenz ω “ ist, ist $a_{in}(t)$ als „Vernichter eines Delta-Peaks“⁵ bei $x = t_0 - t < 0$ auffassen.

Ebenso erhält man mit einer bei $t = t_1$ (in der Zukunft) spezifizierten Anfangsbedingung und $a_{out}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t-t_1)} b_{t_1}(\omega) d\omega$ ($t < t_1$) eine zweite Gleichung für Zeiten $t < t_1$:

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) + \frac{\gamma}{2}a(t) - \sqrt{\gamma}a_{out}(t). \quad (1.3)$$

Input-Output-Beziehung

Durch Subtraktion dieser Gleichungen kann ein Zusammenhang zwischen den Input- und Output-Feldern und dem Feld im Hohlraumresonator hergeleitet werden:

$$a_{out}(t) - a_{in}(t) = \sqrt{\gamma}a(t). \quad (1.4)$$

Durch Fouriertransformation der Langevin-Gleichungen (bezüglich der Zeitvariable) erhält man eine an die Streutheorie erinnernde Relation zwischen $a_{in}(\omega)$ und $a_{out}(\omega)$

$$a_{out}(\omega) = \frac{i(\omega - \omega_0) + \gamma/2}{i(\omega - \omega_0) - \gamma/2} a_{in}(\omega). \quad (1.5)$$

Die Ableitung derartiger Beziehungen ist Ziel und Charakteristikum des Input-Output-Formalismus. Sie ermöglichen es z.B., aus der Kenntnis von Erwartungswerten der ein- und auslaufenden Felder (die durch a_{in} und a_{out} beschrieben werden) auf die Erwartungswerte von System-Observablen zu schließen.

⁵ „Vernichter von Distributionen“ werden z.B. von OBATA in *White Noise Calculus and Fock Space*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1577, 1994, definiert. Die Grundidee dabei ist, statt des Fockraums über $L^2(\mathbb{R})$ den Fockraum über den schnellfallenden Funktionen zu betrachten.

In ihrer Diplomarbeit [7] konnte C. RUPP zeigen, daß dieses System durch eine quasifreie Dynamik beschrieben wird und die zugehörige Einteilchen-Zeitentwicklung U_t durch die minimale unitäre Dilatation von $e^{-\lambda t}$, $\lambda = i\omega_0 + \gamma/2$ gegeben ist. Die Input-Output-Beziehung 1.4 konnte im Rahmen der Streutheorie abgeleitet werden.

Die Quasifreiheit der Zeitentwicklung ermöglicht eine Behandlung des Systems, die einfacher ist als die oben referierte (insbesondere: ohne operatorwertige Distributionen auskommt) und zudem den Vorteil hat, darstellungsunabhängig zu sein: statt der Heisenberg-Zeitentwicklung von Operatoren auf dem Fockraum wird im folgenden die Schrödinger-Zeitentwicklung von Testfunktionen aus dem (viel kleineren und „handlicheren“) Einteilchen-Hilbertraum betrachtet. Aus dieser läßt sich dann (mittels kanonischer Zweitquantisierung) die zugehörige Dynamik auf den Observablen bestimmen. Durch GNS-Darstellung zum Fock-Vakuumvektor lassen sich die Gleichungen aus Abschnitt 1.1 reproduzieren. Es ist aber auch möglich – falls die Fock-Darstellung nicht angemessen ist – eine andere Darstellung zu wählen. Dies könnte z.B. bei der Betrachtung niederfrequenter Strahlung (Mikrowellen) interessant sein, wenn nicht mehr vernachlässigt werden kann, daß das Experiment bei endlicher Temperatur stattfindet und der Grundzustand nicht das Fock-Vakuum ist. Ob die bei der Motivation des Hamilton-Operators gemachten Näherungen dann noch zulässig sind, ist allerdings fraglich.

1.2 Der Hohlraumresonator als Zweitquantisierung der unitären Dilatation von $e^{-\lambda t}$

In diesem Abschnitt wird eine unitäre Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf dem Einteilchenraum $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$ betrachtet und gezeigt, daß deren kanonische Zweitquantisierung in der Fockdarstellung die von \mathbb{H} generierte Dynamik beschreibt. Anschließend wird die Streutheorie von U_t untersucht, da sich die Input- und Output-Operatoren am besten aus einem streutheoretischen Blickwinkel interpretieren lassen.

Die unitäre Gruppe ist durch die Dilatation der Halbgruppe $e^{-\lambda t}$ gegeben. Daher zunächst ein paar Worte über unitäre Dilatationen.

1.2.1 Die unitäre Dilatation einer Halbgruppe

Definition 1.2.1 (Unitäre Dilatation, nach [4])

Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ eine stark stetige Halbgruppe⁶ von Kontraktionen auf dem Hil-

⁶Der Übersichtlichkeit halber werde ich eine Gruppe oder Halbgruppe von Operatoren

bertraum \mathcal{H} . Eine stark stetige unitäre Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf $\hat{\mathcal{H}}$ heißt unitäre Dilatation von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, falls eine Isometrie $I : \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ mit Adjungierter P existiert, so daß $PU_tI = T_t$ für alle $t > 0$.

Die Dilatation U_t heißt minimal, falls $\overline{\text{LH} \{ \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (U_t(I\mathcal{H})) \}} = \hat{\mathcal{H}}$, d.h. falls die U_t -Bilder des System-Hilbertraums \mathcal{H} dicht im großen Hilbertraum $\hat{\mathcal{H}}$ liegen, $\hat{\mathcal{H}}$ also nicht größer als nötig ist.

Physikalisch ist man an Dilatationen interessiert, da man sie als Dynamiken der abgeschlossenen Quantensysteme verstehen kann, die ein offenes, dissipatives System enthalten, dessen Dynamik durch die Halbgruppe beschrieben wird.

Jede stark stetige Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ von Kontraktionen auf einem Hilbertraum \mathcal{H} besitzt (bis auf unitäre Äquivalenz) genau eine minimale unitäre Dilatation $(U_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ (SZ. NAGY, FOIAS: *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*, North Holland, 1970).

Kopplungsdarstellung der Dilatation

KÜMMERER und SCHRÖDER zeigten in [4], daß die Dilatation jeder Halbgruppe eine *Kopplungsdarstellung* besitzt, die der physikalischen Interpretation der Dilatation besonders gemäß ist, da $\hat{\mathcal{H}}$ in eine direkte Summe von „System-Hilbertraum“ und „Hilbertraum der Umgebung“ zerfällt und sich der Generator von $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ wie \mathbb{H} in Gl. (1.1) als Summe von System-, Umgebungs- und Kopplungs-Hamilton-Operator schreiben läßt:

Satz 1.2.1 (Kopplungsdarstellung unitärer Dilationen (nach [4] I, 2.2.3))

Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ Kontraktionshalbgruppe auf \mathcal{H} . Dann ist eine minimale unitäre Dilatation von T_t auf $\hat{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}_-, \mathcal{K}_-) \oplus \mathcal{H} \oplus L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K}_+)$ mit der Isometrie $I : \mathcal{H} \ni x \mapsto 0 \oplus x \oplus 0 \in \hat{\mathcal{H}}$ gegeben durch:

$$U_t = \begin{pmatrix} S_t^- & 0 & 0 \\ X_t & T_t & 0 \\ Z_t & Y_t & S_t^+ \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.6)$$

wobei S_t^\pm den Rechtsshift auf dem (kanonisch mit $L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{K}_+)$ identifizierten) Raum $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{K}_+$ bzw. $L^2(\mathbb{R}^-) \otimes \mathcal{K}_-$ bezeichnet und die Kontraktionen X_t, Y_t, Z_t folgendermaßen definiert sind:

$$X_t : L^2(\mathbb{R}^-) \otimes \mathcal{K}_- \rightarrow \mathcal{H}$$

$(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$, $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ usw. gelegentlich auch durch T_t, U_t usw. bezeichnen.

$$\begin{aligned}
 \chi_J \otimes C_- \eta &\mapsto \int_0^t T_s A^\dagger \eta \chi_J(s-t) ds + A \int_0^t T_s \eta \chi_J(s-t) ds, \\
 Y_t : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{K}_+ \\
 \xi &\mapsto -C_+ T_{t-s} \xi \chi_{[0,t]}(s), \\
 Z_t : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^-) \otimes \mathcal{K}_- &\rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{K}_+ \\
 \chi_{[-t,-r]} \otimes C_- \eta &\mapsto \int_0^{t-r} Y_s A^\dagger \eta ds - Y_{t-r} \eta \quad (r \in [0, t]).
 \end{aligned}$$

Der Operator C_+ (bzw. C_-) ist auf dem Definitionsbereich des Generators A (A^\dagger) der Halbgruppe T_t (T_t^\dagger) definiert und bildet ihn dicht in den Hilbertraum \mathcal{K}_+ (\mathcal{K}_-) ab. (Wie in [4] gezeigt wird, beschreibt C_\pm die Kopplung des Systems an die Umgebung $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{K}_+$ bzw. $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^-) \otimes \mathcal{K}_-$.) J ist endliches Intervall und $\eta \in \mathcal{D}(A^\dagger)$; für Details siehe [4].

Die Operatoren X_t, Y_t, Z_t sind dicht definierte Kontraktionen und lassen sich zu überall definierten Operatoren fortsetzen.

Wie in [4] gezeigt, nimmt \hat{T}_t eine wesentlich übersichtlichere Form an, wenn T_t für alle t selbstadjungiert ist. Dies ist der Fall, wenn die Dynamik des Systems ausschließlich von der Kopplung an die Umgebung herrührt. Wenn Real- und Imaginärteil des Generators von T_t kommutieren, kann die unitäre Dynamik des Systems durch den Übergang ins Wechselwirkungsbild wegtransformiert und dann \hat{T}_t ebenfalls auf einfachere Form gebracht werden. Die unitäre Dilatation, die die Einteilchendynamik des offenen Hohlraumresonator beschreibt, ist das einfachste Beispiel für diesen Fall.

1.2.2 Zeitentwicklung im Einteilchenraum

In diesem Unterabschnitt wird die minimale Dilatation U_t einer Halbgruppe auf \mathbb{C} untersucht, die die Dynamik eines gedämpften harmonischen Oszillators beschreibt und daher eine naheliegende Wahl für die gesuchte Einteilchendynamik des offenen Resonators ist. Der Hilbertraum der Dilatation ist dann $\mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, passend zum Einteilchenraum \mathcal{H} aus Abschnitt 1.1. Im nächsten Unterabschnitt wird dann gezeigt, daß die Zweitquantisierung von U_t die Zeitentwicklung des offenen Hohlraumresonators beschreibt.

Die Einteilchen-Zeitentwicklung des (geschlossenen) Hohlraumresonators ist eine Oszillation mit der Grundfrequenz ω_0 : $T_t^{(0)} = e^{-i\omega_0 t}$. Die Verluste durch den teilweise durchlässigen Spiegel dämpfen diese Oszillation. Der einfachste Ansatz für die Einteilchendynamik des offenen Hohlraumresonators ist eine *exponentiell* gedämpfte Oszillation, die für $t > 0$ durch die Halbgruppe $T_t = e^{-\alpha t} T_t^{(0)}$, $\alpha > 0$ beschrieben wird. Wie in [5] gezeigt, ist die Dämpfung

genau dann exponentiell, wenn die Kopplung frequenzunabhängig ist, d.h. in der Markov-Näherung. Die Einteilchen-Zeitentwicklung des Gesamtsystems sollte also für $t > 0$ durch die minimale unitäre Dilatation von T_t beschrieben werden. Zum besseren Vergleich mit Abschnitt 1.1 wird die Dämpfungskonstante mit $\frac{\gamma}{2} > 0$ bezeichnet: $T_t := e^{-(i\omega_0 + \frac{\gamma}{2})t} =: e^{-\lambda t}$.

Die unitäre Dilatation von T_t

Die minimale unitäre Dilatation von $T_{t \geq 0}$ ist gegeben durch

$$U_{t \geq 0} : \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}) \quad (1.7)$$

$$U_{t \geq 0} : \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} z - i\kappa \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(-s) ds \\ S_t f - |\kappa|^2 \chi_{[0,t]}(x) \int_0^{t-x} e^{-\lambda(t-x-s)} f(-s) ds - i\bar{\kappa} e^{-\lambda(t-x)} \chi_{[0,t]}(x) z \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\gamma = |\kappa|^2$ und im allgemeinen ist $\kappa \in \mathbb{C}$, d.h. bei der Transmission durch den Spiegel wird eine Phasenverschiebung um $e^{i\phi}$ zugelassen. Es kann jedoch oBdA $\kappa = \sqrt{\gamma} \in \mathbb{R}^+$ angenommen werden. Denn sei $\kappa = \sqrt{\gamma} e^{i\phi}$, dann betrachte statt U_t die durch $V = 1 \oplus M_{e^{i\phi}}$ unitär transformierte Zeitentwicklung $\tilde{U}_t := V U_t V^\dagger$. \tilde{U}_t unterscheidet sich von U_t nur dadurch, daß κ durch $|\kappa|$ ersetzt ist. Im folgenden ist also immer $\kappa = \sqrt{\gamma} \in \mathbb{R}^+$.

Die Zeitentwicklung in die Vergangenheit (d.h. für $t < 0$) erhält man dann durch $U_t := (U_{-t})^\dagger$. Es ist

$$U_{t \leq 0} : \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{\bar{\lambda} t} z - i\sqrt{\gamma} \int_0^t e^{\bar{\lambda}(t-s)} f(-s) ds \\ S_t f + \gamma \chi_{[t,0]}(x) \int_0^{t-x} e^{\bar{\lambda}(t-x-s)} f(-s) ds + i\sqrt{\gamma} e^{\bar{\lambda}(t-x)} z \chi_{[t,0]}(x) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Dies ist *nicht* die Zeitentwicklung, die sich ergäbe, wenn man in Gl. (1.7) t durch $-t$ ersetzte. Die nun für alle $t \in \mathbb{R}$ definierten U_t bilden eine unitäre Gruppe. U_t im Spezialfall $\gamma = 0$ wird mit $U_t^{(0)}$ bezeichnet.

Manchmal ist es günstig, ins Fourierbild zu gehen. Die entsprechenden Operatoren finden sich im Anhang B auf den Seiten 94f.

Für $\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ gilt:

$$U_t \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} = U_t \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ S_t f \end{pmatrix} - i\sqrt{\gamma} \int_0^t U_s \begin{pmatrix} f(s-t) \\ 0 \end{pmatrix} ds. \quad (1.9)$$

Das entspricht dem in [4] beschriebenen Verhalten: die Umgebungsanregung wird vom Shift zum System transportiert; dort führt sie zu einer (zusätzlichen) Anregung $\sqrt{\gamma} f(s-t)$ und zerfällt dann nach demselben Gesetz wie die ursprüngliche Anregung des Systems.

Der Hamilton-Operator

In [4] wird auch der Generator H dieser unitären Gruppe angegeben. Sein Definitionsbereich ist

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ (z, f) : f|_{\mathbb{R}^+} \in W^1(\mathbb{R}^+), f|_{\mathbb{R}^-} \in W^1(\mathbb{R}^-) \text{ und } f(0^+) - f(0^-) = -i\sqrt{\gamma} z \right\}. \quad (1.10)$$

Damit $\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$ in $\mathcal{D}(H)$ liegt, müssen $f|_{\mathbb{R}^\pm}$ im Sobolev-Raum $W^1(\mathbb{R}^\pm)$ der quadratintegrierbaren Funktionen mit quadratintegrierbarer Ableitung liegen, und f muß an der Stelle $x = 0$ einen Sprung machen, dessen Höhe proportional zu z ist.

H läßt sich mit δ_0 , der Diracschen Deltadistribution an der Stelle $x = 0$, formal schreiben als

$$H : \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}) \supset \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$$

$$H = \begin{pmatrix} z \mapsto \omega_0 z & f \mapsto \sqrt{\gamma} f(0) \\ z \mapsto \sqrt{\gamma} z \delta_0 & f \mapsto -i \frac{d}{dx} f \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Der Definitionsbereich ist also gerade so gewählt, daß der „Delta-Peak bei $x = 0$ “, der von der Kopplung herrührt, durch den, der durch die Differentiation der bei $x = 0$ unstetigen Funktion f entsteht, kompensiert wird und $H \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$ damit wieder in \mathcal{H} liegt. Mit der Punktauswertung $f \mapsto f(0)$ ist eine *symmetrische* Punktauswertung gemeint. Korrekter wäre es, (wie in [4]) zu schreiben: $f(0) = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-))$. Der Übersichtlichkeit halber wird hier und in den übrigen Kapiteln $f(0)$ geschrieben, auch wenn immer nur die symmetrische Punktauswertung gemeint ist. Unter Berücksichtigung der Bedingung $f(0^+) - f(0^-) = -i\sqrt{\gamma}z$ führt dieser Term dann gerade zu einer exponentiellen Dämpfung von z_t .

Der Ausdruck 1.11 ist zunächst nur formal, kann aber als Graphenlimes einer Folge $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefinierter selbstadjungierter Operatoren H_n verstanden werden. Die von den Operatoren H_n erzeugten unitären Gruppen konvergieren auf kompakten Zeitintervallen gleichmäßig gegen $(U_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, d.h. $\sup_{t \in K} \|e^{iH_n t} - U_t\| \rightarrow 0 \forall K \subset \mathbb{R}$ kompakt (siehe [4]).

Dieser Einteilchen-Hamilton-Operator hat dieselbe Struktur wie der Hamilton-Operator \mathbb{H} aus Abschnitt 1.1: $H = H_s + H_b + H_k$.

$H_s = \omega_0$ ist der Hamilton-Operator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. $H_b = -i \frac{d}{dx}$ ist der Hamilton-Operator des durch weißes Rauschen genäherten Bades. H_k beschreibt die frequenzunabhängige („weiße“), im Ortsbild also singuläre Kopplung zwischen System und Umgebung.

Um H mit dem Fockraum-Hamilton-Operator \mathbb{H} aus Abschnitt 1.1 in Verbindung zu bringen, muß der Nullpunkt der Frequenzskala weit (um die optische Frequenz ν) nach rechts verschoben werden (vgl. S.9). Dies wird dadurch erreicht, daß zur Zeit t statt der Testfunktion $(z_t, f_t) \in \mathcal{H}$ die durch $V_t = e^{i\nu t} \oplus M_{e^{i\nu(t-x)}}$ unitär transformierte Testfunktion $V_t \begin{pmatrix} z_t \\ f_t \end{pmatrix}$ betrachtet wird. Häufig wird diese Transformation als „Übergang in ein Wechselwirkungsbild bei der Frequenz ν “ bezeichnet. Da die V_t keine unitäre Gruppe bilden, entspricht diese Bezeichnung jedoch nicht ganz der üblichen Definition eines Wechselwirkungsbilds.

Es wird sich zeigen, daß \mathbb{H} die kanonische Zweitquantisierung von H ist.

Die Schrödingergleichung

Betrachtet man die zu H gehörende Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_t \\ f_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 z_t + \sqrt{\gamma} f_t(0) \\ \sqrt{\gamma} z_t \delta_0 - i \frac{d}{dx} f_t \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} z_0 \\ f_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(H)$, so erhält man für $t > 0$ in der Badkomponente

$$f_t(x) = (S_{t-t_0} f_0)(x) - i \sqrt{\gamma} z_{t-x} \chi_{[0, t-t_0]}(x).$$

Einsetzen in die DGl für z führt dann auf eine Hilbertraum–Langevin-Gleichung⁷ für z , die der operatorwertigen Langevin-Gleichung 1.2 entspricht:

$$\frac{d}{dt} z_t = \lambda z_t - \sqrt{\gamma} z_{in}(t), \quad t > t_0. \quad (1.13)$$

Die Anfangsbedingung $z_{t_0} = z_0$ dieser Gleichung ist durch z_{in} schon vollständig festgelegt. Denn da $\begin{pmatrix} z_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{D}(H)$ liegen muß, legt die Angabe einer Funktion f_0 die Anregung z_0 im System schon eindeutig fest.

Der „Input“ ins System ist zur Zeit t gegeben durch

$$z_{in}(t) := i f_0(t_0 - t).$$

Das heißt, zur Zeit t gelangt die Anregung des Bads ins System, die sich zur Zeit t_0 noch $t - t_0$ Einheiten links von der Wechselwirkungsregion (dem Spiegel) bei $x = 0$ befunden hat.

Gibt man zur Gl. (1.12) anstelle der Anfangsbedingung bei t_0 eine Endbedingung $\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}(t_1) = \begin{pmatrix} z_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(H)$ bei $t = t_1$ vor, so erhält man die zeitgespiegelte („time-reversed“) Langevin-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} z_t = \bar{\lambda} z_t - \sqrt{\gamma} z_{out}(t), \quad t < t_1. \quad (1.14)$$

Der „Output“ aus dem System ist zur Zeit t gegeben durch

$$z_{out}(t) := i f_1(t_1 - t).$$

Das heißt, die Anregung, die zur Zeit t aus dem System in die Umgebung abgegeben wird, ist zur Zeit $t_1 > t$ schon $t_1 - t$ Einheiten von der Wechselwirkungsregion entfernt.

⁷Die Bezeichnung als Langevin-Gleichung impliziert eine Interpretation, die in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wird: daß nämlich der in Gl. (1.13) auftretende Anfangswert z_{in} gar nicht durch eine differenzierbare Funktion gegeben ist, sondern z.B. durch den Pfad einer Brownschen Bewegung beschrieben werden muß. Dann sind (1.13,1.14) zwei stochast. DGl'n. Solange Gl. (1.12) als gewöhnlich Differentialgleichung behandelt wird, sind die Zustände von System und Bad nicht unabhängig voneinander wählbar.

Die Input-Output-Beziehung

Durch Subtraktion der beiden Langevin-Gleichungen 1.13,1.14 erhält man eine der Randbedingung 1.4 analoge Gleichung:

$$z_{out}(t) - z_{in}(t) = \sqrt{\gamma}z_t, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.15)$$

Wie ist diese Gleichung zu interpretieren? Es ist eine Randbedingung, die die Input- und Output-Funktionen (die Anfangs- bzw. Endbedingung der DGI) erfüllen müssen, damit sie überhaupt zur selben Lösung der DGI 1.12 gehören.

Denn da die Angabe von f_0 auch z_0 bestimmt, bleibt bei der Wahl der Endbedingung f_1 keine Freiheit mehr, sondern sie ist durch obige Bedingung festgelegt:

$$f_1(t_1 - t) = f_0(t_0 - t) - i\sqrt{\gamma}z_t \chi_{[t_0, t_1]}(t). \quad (1.16)$$

Außerhalb des Intervalls $[0, t_1 - t_0]$ ist $f_1(x)$ die um $t_1 - t_0$ nach rechts verschobene Funktion f_0 – dieser Teil von f_0 stand nicht in Wechselwirkung mit dem Hohlraum. Innerhalb dieses Intervalls unterscheidet sich f_1 vom verschobenen f_0 um $-i\sqrt{\gamma}z_t$: das ist die Folge der Wechselwirkung die in der Zwischenzeit zwischen System und Bad stattgefunden hat.

Die Randbedingung erlaubt einerseits bei vollständiger Kenntnis von f_1 und f_0 den Rückschluß auf z_t für alle $t \in [t_0, t_1]$, andererseits läßt sich aus Kenntnis der Systemvariablen und des Outputs der zugehörige Input bestimmen und umgekehrt.

Die Input-Output-Relation 1.15 sieht zwar genauso aus, wie Gl. (1.4), ist aber der Hilbertraum-Struktur nicht angepaßt und weder zur streutheoretischen Betrachtung noch zur Zweitquantisierung besonders geeignet. Dazu eignet sich die von C.RUPP abgeleitete Input-Output-Relation ([7], Satz 3.2.1):

$$U_{t_0}U_{-t_0}^{(0)}U_t^{(0)}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} - U_{t_1}U_{-t_1}^{(0)}U_t^{(0)}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = -i\sqrt{\gamma}U_t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.17)$$

Ausgehend von Gl. (1.9) kann man zeigen, daß für eine beliebige $L^2(\mathbb{R})$ -Funktion f gilt⁸

$$U_{t_1}U_{-t_1}^{(0)}U_t^{(0)}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} - U_{t_0}U_{-t_0}^{(0)}U_t^{(0)}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = -i\sqrt{\gamma} \int_{t_0}^{t_1} U_s \begin{pmatrix} f(s-t) \\ 0 \end{pmatrix} ds \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.18)$$

Eine anschauliche Interpretation dieser Beziehung läßt sich finden, wenn man definiert $g := S_{t-t_1}f$ und die Gleichung mit U_{-t_0} multipliziert. Dann steht auf

⁸Der Beweis ist identisch mit dem von 1.17 in [7].

der rechten Seite $U_{t_1-t_0} \binom{0}{g} - U_{t_1-t_0}^{(0)} \binom{0}{g}$, d.h. die Gleichung gibt (wie Gl. (1.16)) den Unterschied zwischen dem unter Einfluß der Störung und dem ungestört entwickelten Zustand an.

Im Rahmen der streutheoretischen Untersuchung von U_t läßt sich Gl. (1.18) als Randbedingung verstehen, der bei $t = \pm\infty$ spezifizierte Anfangs- bzw. Endbedingungen genügen müssen.

1.2.3 Zweitquantisierung von U_t und Vergleich mit Abschnitt 1.1.

In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, daß die Dilatation U_t (vgl. 1.7, 1.8) auf der Algebra $CCR(\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}))$ eine unitäre Dynamik induziert, die in der Fock-Darstellung mit der Zeitentwicklung aus Abschnitt 1.1 übereinstimmt. Zunächst jedoch ein paar Bemerkungen zum Formalismus der kanonischen Quantisierung.

Kanonische Zweitquantisierung

Als (*kanonische*) *Zweitquantisierung* bezeichnet man eine mathematische Prozedur, mittels derer man – grob gesprochen – von einer gegebenen quantenmechanischen Einteilchen-Theorie zur zugehörigen Quantenfeldtheorie (mit variabler Teilchenzahl) übergehen kann.⁹

Die Zweitquantisierung des Systems (\mathcal{H}, U_t) wird durch einen Funktor Γ beschrieben, der das Paar aus Hilbertraum und Zeitentwicklung abbildet auf ein Paar (\mathcal{A}, α_t) bestehend aus Observablenalgebra \mathcal{A} und (quasifreier) Automorphismengruppe α_t , die die (Heisenberg)–Zeitentwicklung der Observablen beschreibt.

Geht es um ein Bosonen-System, so ist die passende Observablenalgebra die *Algebra der kanonischen Vertauschungsrelationen* über \mathcal{H} , die mit $CCR(\mathcal{H})$ bezeichnet wird (hierzu und zu weiteren in diesem Abschnitt auftretenden Begriffen vgl. Anhang A).

Der *Testfunktionenraum* \mathcal{H} ist im allgemeinen ein Prä-Hilbertraum oder, allgemeiner, nur ein *symplektischer Raum*. Jedem (nichtentarteten) symplektischen Raum (\mathcal{H}, σ) ist eindeutig die C^* -Algebra $CCR(\mathcal{H})$ zugeordnet. Im folgenden ist \mathcal{H} aber immer ein komplexer Hilbertraum. Er kann als der Raum

⁹Als *erste Quantisierung* bezeichnet man den Übergang von einer klassischen Beschreibung eines physikalischen Systems zur „zugehörigen“ quantenmechanischen Beschreibung. Im Gegensatz zur zweiten Quantisierung gibt es keinen wohldefinierten Algorithmus, der die Erstquantisierung beschreibt. E. NELSON formuliert das prägnant: „*First quantization is a mystery, but second quantization is a functor*“.

der zulässigen Moden oder Einteilchen-Zustände des untersuchten Systems interpretiert werden.

Die C^* -Algebra $CCR(\mathcal{H})$ wird von den unitären *Weyloperatoren* $W(f)$ erzeugt, die die kanonischen Vertauschungsrelationen (A.1) erfüllen.

Die Zustände des Systems werden durch die normierten positiven linearen Funktionale auf $CCR(\mathcal{H})$ beschrieben. Aufgrund der Vertauschungsrelationen ist jeder Zustand φ eindeutig durch seine Werte auf den Weyloperatoren bestimmt. Die Abbildung $C_\varphi : f \mapsto \varphi(W(f))$ heißt das *charakteristische Funktional* des Zustands φ .

In einer regulären Darstellung π von $CCR(\mathcal{H})$ (d.h. einer Darstellung, in der $t \mapsto \pi(W(tf))$ für alle $f \in \mathcal{H}$ stark stetig ist) können zu allen $f \in \mathcal{H}$ *Feldoperatoren*

$$\Phi(f) := -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\pi(W(tf)) - \pi(W(0))),$$

Vernichter

$$A(f) := \frac{1}{2} (\Phi(f) + i\Phi(if))$$

und *Erzeuger*

$$A^\dagger(f) := \frac{1}{2} (\Phi(f) - i\Phi(if))$$

auf dem Darstellungs-Hilbertraum definiert werden (vgl. z.B. [10]).

Die Feldoperatoren haben in der (in der Coulomb-Eichung kanonisch quantisierten) Quantenelektrodynamik eine direkte physikalische Bedeutung: $\Phi(f)$ zu einer reellen Testfunktion f ist die Observable, die die Messung der f -Mode des Vektorpotentials beschreibt, $\Phi(f)$ zu einer rein imaginären Testfunktion beschreibt die Messung der f -Mode der elektrischen Feldstärke. (vgl. [13], III und [15]).

Nach dem Satz von SLAWNY (vgl. z.B. [10]) läßt sich jeder symplektischen Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf dem Testfunktionenraum \mathcal{H} kanonisch eine Gruppe von C^* -Algebra-Automorphismen α_{T_t} zuordnen. α_{T_t} ist definiert durch $\alpha_{T_t} : W(f) \mapsto W(T_t f)$ und wird als *Zweitquantisierung* von T_t bezeichnet. Insbesondere erhält man auf diese Weise die Zweitquantisierung α_t der unitären Einteilchendynamik U_t .

Zweitquantisierung von U_t

Angewandt auf die unitäre Dilatation U_t aus dem vorigen Unterabschnitt heißt das: Der Testfunktionenraum \mathcal{H} ist durch den Hilbertraum $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Die Zeitentwicklung auf der Observablenalgebra $CCR(\mathcal{H})$ wird (im

Heisenbergbild) durch

$$\begin{aligned}\alpha_t: \text{CCR}(\mathcal{H}) &\rightarrow \text{CCR}(\mathcal{H}) \\ \alpha_t(W(f)) &:= W(U_t f)\end{aligned}$$

beschrieben. Im *Schrödingerbild* ist die Dynamik durch die (zu α_t duale) Transformation ν_t auf dem Raum $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ der Zustände auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ gegeben. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$, dann ist der transformierte Zustand $\nu_t(\varphi)$ definiert durch die Erwartungswerte der Weyloperatoren

$$\nu_t(\varphi)(W(f)) := \varphi(W(U_t f)).$$

Also ist das charakteristische Funktional $C_{\nu_t(\varphi)}$ des transformierten Zustands gleich $C_\varphi \circ U_t$.

Die zur freien Zeitentwicklung $U_t^{(0)}$ gehörende Bogoliubov-Transformation wird im folgenden mit $\alpha_t^{(0)}$ (bzw. mit $\nu_t^{(0)}$) bezeichnet.

Feldoperatoren, Erzeuger und Vernichter sind zwar nicht Elemente der Algebra $\text{CCR}(\mathcal{H})$, dennoch kann aus den Definitionsgleichungen auch ihr Verhalten unter der Zeitentwicklung α_t bestimmt werden, und zwar gilt:

$$\Phi\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t) = -i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\pi(W(s U_t \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix})) - \pi(W(0)) \right) = \Phi(U_t \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}).$$

$A\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t), A^\dagger\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t)$ ergeben sich wie oben aus den transformierten Feldoperatoren $\Phi\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t)$.

Notation: (Zeitentwicklung der Erzeuger und Vernichter)

Der im Heisenberg-Bild zeitentwickelte Operator $A\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)$, wird mit $\alpha_t(A\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right))$ oder $A\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t)$ bezeichnet. Ist die Zeitentwicklung quasifrei und eichinvariant und damit durch eine unitäre Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf dem Testfunktionenraum gegeben, so schreibe auch $A\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t) = A\left(U_t\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)\right)$.

Mit U_t aus Gl. (1.7) gilt für $t > 0$:

$$\begin{aligned}A\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)(t) &= A\left(U_t\left(\begin{matrix} z \\ f \end{matrix}\right)\right) \\ &= A\left(\begin{matrix} e^{-\lambda t} z \\ x \mapsto -i\sqrt{\gamma}e^{-\lambda(x-t)}\chi_{[0,t]}(x)z \end{matrix}\right) \\ &\quad + A\left(\begin{matrix} 0 \\ x \mapsto (S_t f)(x) \end{matrix}\right) \\ &\quad + A\left(\begin{matrix} -i\sqrt{\gamma}e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(-s) ds \\ x \mapsto -\gamma e^{-\lambda(x-t)} \chi_{[0,t]}(x) \int_0^{t-x} e^{\lambda s} f(-s) ds \end{matrix}\right). \quad (1.19)\end{aligned}$$

Für $t < 0$ muß U_t aus Gl. (1.8) eingesetzt werden. Mit $a(t) := A(U_t \binom{1}{0})$ und Gl. (1.9) läßt sich das für alle $t \in \mathbb{R}$ übersichtlicher schreiben:

$$A \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} (t) = \bar{z}a(t) + A \begin{pmatrix} 0 \\ S_t f \end{pmatrix} + i\sqrt{\gamma} \int_0^t \overline{f(u-t)} a(u) du. \quad (1.20)$$

Vergleich mit Abschnitt 1.1

Nun wird die Zeitentwicklung α_t und ihre Wirkung auf Erzeuger und Vernichter in der Fockdarstellung betrachtet. Zum direkten Vergleich mit den Gleichungen aus [2] müssen „Erzeuger und Vernichter von Deltafunktionen“ (oder ebenen Wellen) betrachtet werden. Im folgenden wird mit diesen Objekten rein formal gerechnet. Durch „Ausschmieren“ mit z.B. schnellfallenden Funktionen $A(f) = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) A(\delta_x) dx$ erreicht man wieder wohldefinierten Boden (vgl. auch Fußnote auf S.12).

Setzt man in Gl. (1.20) $f = ce^{-i\omega x}$ ein

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \mapsto ce^{-i\omega x} \end{pmatrix} (t) &= A \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} \\ x \mapsto -i\sqrt{\gamma} e^{\lambda(x-t)} \chi_{[0,t]}(x) \end{pmatrix} \\ &+ A \begin{pmatrix} 0 \\ x \mapsto ce^{-i\omega(x-t)} \end{pmatrix} \\ &+ i\bar{c}\sqrt{\gamma} \int_0^t e^{-i\omega(t-u)} a(u) du, \end{aligned}$$

so findet man, daß sie mit den Definitionen

$$\begin{aligned} a(t) &:= A \left(U_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ b_t(\omega) &:= A \left(U_t \begin{pmatrix} 0 \\ x \mapsto -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x} \end{pmatrix} \right), \\ a_{in}(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t-t_0)} b_{t_0}(\omega) d\omega \quad (1.21) \\ &= A \left(U_{t_0} \begin{pmatrix} 0 \\ x \mapsto \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \delta(x - (t - t_0)) \end{pmatrix} \right); \quad t > t_0, \\ a_{out}(t) &:= A \left(U_{t_1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \mapsto \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \delta(x - (t - t_1)) \end{pmatrix} \right); \quad t < t_1 \end{aligned}$$

und für $t_0 = 0$ der in [2] angegebenen Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Badoperatoren $b(\omega)$ entspricht.

$$b_t(\omega) = e^{-i\omega t} b_0(\omega) - \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^t e^{-i\omega(t-u)} a(u) du.$$

Ebenso formal ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}a(t) = -\lambda a(t) + \sqrt{\gamma}a_{in}(t),$$

eine Langevin-Gleichung für den Vernichter zur Testfunktion $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vgl. Gl. (1.2)).

Beispiel 1.2.1 (Dissipation der im Hohlraum vorhandenen Energie)

Als eine erste kleine Anwendung sei die zur Zeit t im Hohlraum gespeicherte Energie $E(t)$ berechnet. Sie ist durch den Erwartungswert des Teilchenzahloperators $N(f)(t) = A^\dagger(U_t f)A(U_t f)$ zur Testfunktion $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Das äußere Feld befinde sich im Vakuum, der Hohlraum in einem n -Teilchen-Zustand, d.h. es wird der n -Teilchen-Zustand zur Testfunktion $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachtet. Wie erwartet ergibt sich eine exponentielle Abnahme:

$$E(t) := \varphi_n\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)(N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)(t)) = ne^{-\gamma t}.$$

Die Größe $Q := \omega_0 \frac{E(t)}{-\frac{d}{dt}E(t)} = \frac{\omega_0}{\gamma}$ gibt an, wieviel Energie der Hohlraum während der „Dauer einer Schwingung“ ω_0^{-1} durch Dissipation verliert. Sie wird als Güte-Faktor (engl. *Q-factor*) des Hohlraums bezeichnet. Je größer Q , desto geringer ist die Verlustrate des Hohlraumresonators. Für optische Hohlräume (wie sie z.B. für Laser verwendet werden) liegt Q nach CORNEY in der Größenordnung 10^9 , ω_0 bei 10^{15} Hz und γ folglich in der Größenordnung 10^6 Hz. In einer Mikrosekunde nimmt die Energie im Resonator also auf e^{-1} ab. Mißt man die Zeit in der dem System angemesseneren Einheit¹⁰ $\frac{\text{LängedesResonators}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}} \approx 10^{-8}$ s, so ist $\gamma \approx 10^{-2}$.

Mehr als am Feld im Hohlraum ist man meist am äußeren Feld interessiert. Beispielweise sucht man in einer Situation, in der der Hohlraum einer direkten Messung nicht zugänglich ist, Umgebungsobservable, aus deren Messung sich Rückschlüsse auf das Feld im Resonator ziehen lassen. Mit der Input-Output-Relation 1.4 lassen sich solche Observablen leicht bestimmen: so lassen sich beispielsweise alle Korrelationsfunktionen des Felds im Hohlraum auf Korrelationsfunktionen der In- und Out-Felder zurückführen. Folglich ist es wichtig zu verstehen, in welchem Sinne $a_{in}(t)$ und $a_{out}(t)$ das äußere Feld beschreiben.

¹⁰ γ in diesen Einheiten entspricht dem Transmissionskoeffizienten T des Spiegels: T ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon transmittiert wird; l/c entspricht grob gesprochen der Zeit, innerhalb derer ein Photon im Resonator einmal auf den Spiegel trifft. Daher ist der relative Energieverlust in dieser Zeitspanne proportional zur Transmissionswahrscheinlichkeit.

Eine andere Frage gilt dem Zusammenhang zwischen einem bei $t = t_0$ in der Vergangenheit „weit weg“ vom Resonator präparierten Feld und dem Feld bei $t = t_1$ in der fernen Zukunft „nach der Wechselwirkung“ mit dem Resonator.

Beidesmal bietet sich also eine streutheoretische Untersuchung der Zeitentwicklung an. Dazu wird zunächst wieder die Streutheorie zur Zeitentwicklung U_t auf dem Hilbertraum \mathcal{H} betrachtet. Mittels kanonischer Zweitquantisierung erhält man dann eine Streutheorie auf der CCR-Algebra.

1.3 Streutheorie der quasifreien Zeitentwicklung

1.3.1 Streutheoretische Untersuchung von U_t

Begriffe und Fragestellungen der Streutheorie[9]

Die Streutheorie untersucht das asymptotische Verhalten von Zuständen ψ unter einer Zeitentwicklung U_t mit dem Ziel, einen Zusammenhang zwischen der fernen Vergangenheit und der fernen Zukunft eines gegebenen Zustands zu finden (zu den mathematischen Grundlagen der Streutheorie: vgl. [9]). Häufig (und auch im Fall der Dilatation U_t) geschieht dies am besten durch den Vergleich mit einer „freien“ Dynamik $U_t^{(0)}$. Die freie Dynamik des Systems „Hohlraumresonator + umgebendes Feld“ entspricht der Situation, in der der Spiegel zwischen Resonator und Feld perfekt (d.h. seine Durchlässigkeit γ gleich 0) ist: $U_t^{(0)} = e^{-i\omega_0 t} \oplus S_t$.

Besonders interessiert ist man an Zuständen ψ , die „asymptotisch frei“ sind, d.h. die sich für sehr kleine (bzw. große) Zeiten wie ein Zustand ψ_- (bzw. ψ_+) unter der freien Zeitentwicklung $U_t^{(0)}$ verhalten, für die also gilt

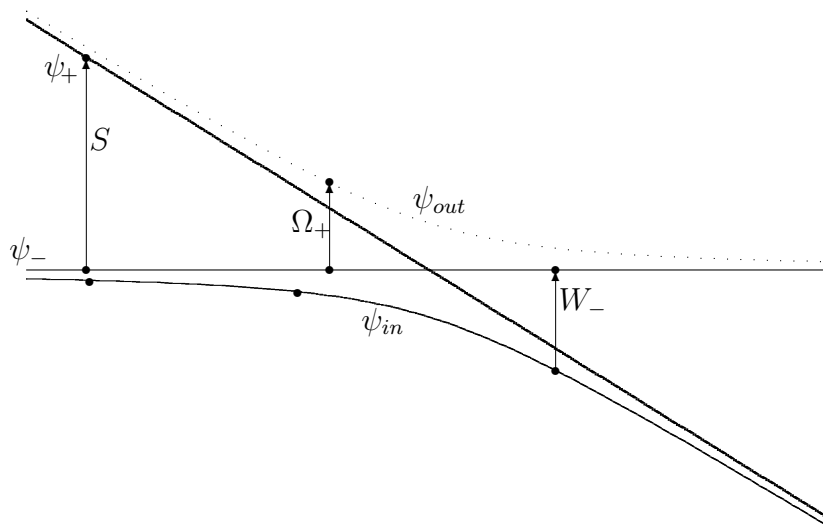
$$\exists \psi_- : \lim_{t \rightarrow -\infty} (U_t \psi - U_t^{(0)} \psi_-) = 0,$$

bzw.

$$\exists \psi_+ : \lim_{t \rightarrow +\infty} (U_t \psi - U_t^{(0)} \psi_+) = 0.$$

Zustände ψ mit dieser Eigenschaft werden als *einlaufende* (bzw. *auslaufende*) *Streuzustände* bezeichnet. Die Abbildungen $W_- : \psi \mapsto \psi_-$ und $W_+ : \psi \mapsto \psi_+$ nennt man *Wellenoperatoren*.¹¹

¹¹Die Notation ist in der Literatur sehr uneinheitlich. In der hier gewählten Notation zeigen die Vorzeichen im Subskript an, ob der betr. Operator den Grenzfall $t \rightarrow +\infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ betrifft. In [9, 7] werden die „Vorzeichen“ entgegengesetzt gewählt. Motivation siehe [9], Kap. X.6.


 Abbildung 1.2: Die Wellenoperatoren W_{\pm} und Ω_{\pm}
Definition 1.3.1 (Wellenoperatoren einer Hilbertraum-Zeitentwicklung)

Seien $U_t, U_t^{(0)}$ zwei stark stetige unitäre Gruppen auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Falls die Grenzwerte

$$\begin{aligned} W_- &:= \operatorname{stop-}\lim_{t \rightarrow -\infty} U_{-t}^{(0)} U_t, \\ W_+ &:= \operatorname{stop-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U_{-t}^{(0)} U_t, \\ \Omega_- = (W_-)^{-1} &:= \operatorname{stop-}\lim_{t \rightarrow -\infty} U_{-t} U_t^{(0)}, \\ \Omega_+ = (W_+)^{-1} &:= \operatorname{stop-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U_{-t} U_t^{(0)} \end{aligned}$$

existieren, werden sie als die Wellenoperatoren der Zeitentwicklung U_t bezeichnet.

Mithilfe der Wellenoperatoren können die zentralen Fragen der Streutheorie formuliert werden: (1) Existiert zu jedem freien Zustand ein Streuzustand, d.h. kann ein beliebiges (durch ψ_- beschriebenes) asymptotisches Verhalten experimentell realisiert werden (durch die Präparation eines Zustands ψ)? Das entspricht der Frage, ob die Wellenoperatoren surjektiv sind.

(2) Ist ein Streuzustand ψ durch die Angabe des zugehörigen freien Zustands schon eindeutig festgelegt, d.h. kann ein System durch sein asymptotisches Verhalten eindeutig beschrieben werden? Das entspricht der Frage, ob die

Wellenoperatoren injektiv sind.

Sind für eine gegebene Zeitentwicklung U_t beide Fragen positiv beantwortet, dann kann das betreffende System (von gebundenen Zuständen abgesehen) vollständig durch freie Zustände beschrieben werden: das asymptotische Verhalten in der Vergangenheit sagt schon alles über die Zukunft. Ein solches System nennt man *asymptotisch vollständig*.

Ist ein System asymptotisch vollständig, dann sind die Wellenoperatoren W_{\pm} Bijektionen und es läßt sich der *Streuoperator* S definieren, der dem zu ψ gehörenden einlaufenden freien Zustand ψ_- den zu ψ gehörenden auslaufenden freien Zustand ψ_+ zuordnet: $S : \psi_- \mapsto \psi_+$. Es ist $S = W_+(W_-)^{-1}$. Der Streuoperator faßt die in Streuexperimenten beobachtbaren Eigenschaften des untersuchten Systems zusammen. Die inversen Wellenoperatoren (die einem freien Zustand ψ_{\pm} den Streuzustand zuordnen, der sich asymptotisch wie ψ_{\pm} verhält) seien im folgenden mit $\Omega_{\pm} := (W_{\pm})^{-1}$ bezeichnet.

Ziel der Streutheorie ist die Bestimmung und Untersuchung der Wellen- und Streuoperatoren.

Im vorliegenden Fall ist dazu der LAX-PHILLIPSSche Zugang zur Streutheorie (siehe z.B. [8, 9]) besonders geeignet.

Lax-Phillips–Streutheorie

Der Lax-Phillips–Formalismus ist auf Systeme anwendbar, deren Dynamik durch eine unitäre Gruppe auf einem Hilbertraum gegeben ist, deren Generator ganz \mathbb{R} als rein kontinuierliches Spektrum konstanter Multiplizität besitzt. Durch die Kopplung an den Shift wurde genau das erreicht.

Der Lax-Phillipsche Zugang ist für das vorliegende System nicht so sehr der bewiesenen Sätze, als der im Hintergrund stehenden geometrischen Vorstellung wegen interessant. Sehr hilfreich ist vor allem der Begriff der *ein- und auslaufenden Teilräume*.

Definition 1.3.2 (Ein- und auslaufende Teilräume, wie in [8, 9])

Sei U_t eine stark stetige unitäre Gruppe auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Ein abgeschlossener Teilraum $D_+ \subset \mathcal{H}$ heißt auslaufend, falls gilt:

- (1) $U_t(D_+) \subset D_+ \forall t \geq 0$.
- (2) $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} (U_t(D_+)) = \{0\}$.
- (3) $\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} (U_t(D_+))} = \mathcal{H}$.

Gelten für D_- (2), (3) und

- (1)' $U_t(D_-) \subset D_- \forall t \leq 0$,

so heißt D_- einlaufender Teilraum.

Das Standardbeispiel für einen auslaufenden Teilraum sind (optische oder akustische) Wellen, die für alle positiven Zeiten in einer kugelförmigen Umgebung um das Streutarget verschwinden. Für $t > 0$ ist die (gestörte) Dynamik auf D_+ besonders einfach – nämlich gleich der ungestörten. Wenn man lange genug wartet, wird jede Anregung des Systems durch U_t in den auslaufenden Teilraum transportiert.

Falls es ein- und auslaufende Teilräume gibt, folgt schon die Existenz unitärer Wellenoperatoren und des Streuoperators.

Satz 1.3.1 (Existenz und Eindeutigkeit der Translationsdarstellungen, (z.B. [9], Theorem XI.82)

Sei U_t eine stark stetige unitäre Gruppe auf dem Hilbertraum \mathcal{H} und sei $D_+ \subset \mathcal{H}$ ein auslaufender Teilraum, dann existieren ein Hilbertraum \mathcal{N}_+ und eine unitäre Abbildung $R_+ : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}_+)$ so daß $R_+(D_+) = L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{N}_+)$ und $U_t^{(+)} := R_+ U_t R_+^\dagger$ der Rechtsshift S_t auf $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}_+)$ ist.

Ebenso gilt, falls D_- ein einlaufender Teilraum ist: es existieren ein Hilbertraum \mathcal{N}_- und eine unitäre Abbildung $R_- : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}_-)$ so daß $R_-(D_-) = L^2(\mathbb{R}^-, \mathcal{N}_-)$ und $U_t^{(-)} := R_- U_t R_-^\dagger$ der Rechtsshift auf $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}_-)$ ist.

Diese Darstellungen sind eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz von \mathcal{N} .

Existieren D_+ und D_- , so können \mathcal{N}_+ und \mathcal{N}_- gleich gewählt werden.

Beweis: siehe z.B. [8, 9].

$(U^{(+)}, L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{N}_+), L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}_+))$ heißt *auslaufende Translationsdarstellung* von (U_t, D_+, \mathcal{H}) ; $(U^{(-)}, L^2(\mathbb{R}^-, \mathcal{N}_-), L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}_-))$ heißt *einlaufende Translationsdarstellung* von (U_t, D_-, \mathcal{H}) .

Existieren ein- und auslaufende Translationsdarstellungen, so läßt sich eine Streutheorie konstruieren. Die Operatoren R_\pm sind dann unitär äquivalent zu den üblichen Wellenoperatoren W_\pm , die über den Vergleich mit einer freien Dynamik definiert werden. Im Prinzip ermöglicht es Satz 1.3.1, Wellen- und Streuoperatoren auch ohne eine „freie Dynamik“ zu bestimmen.

Die Streutheorie von U_t

Weitere Ergebnisse der Lax-Phillipsschen Streutheorie sind zur Berechnung des Streuoperators für das durch den Zeitentwicklungsoperator U_t (1.7, 1.8) beschriebene, einfache System nicht vonnöten. Die Wellenoperatoren können direkt berechnet werden. Trotzdem ist es nützlich, sich zunächst klarzumachen, wie die ein- und auslaufenden Teilräume von $(U_t, \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}))$ aussehen.

Lemma 1.3.1 (Ein- und auslaufende Teilräume von U_t)

$$D_-^{r_0} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : f(x) = 0 \ \forall x > -r_0 \right\}$$

ist für alle $r_0 \geq 0$ ein einlaufender Teilraum von U_t . Ebenso ist

$$D_+^{r_0} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : f(x) = 0 \ \forall x > r_0 \right\}$$

für alle $r_0 \geq 0$ ein auslaufender Teilraum.

Beweis: Zeige, daß $D_-^{r_0}$ die drei Eigenschaften aus 1.3.2 besitzt. Genauso läßt sich zeigen, daß $D_+^{r_0}$ ein auslaufender Teilraum ist.

(1) $U_{t \leq 0}(D_-^{r_0}) \subset D_-^{r_0}$, denn $U_{t \leq 0}$ wirkt auf den auf der positiven Achse verschwindenden Funktionen als Linksshift um $|t|$ Einheiten.

(2) Daß der Durchschnitt aller U_t -Bilder von $D_-^{r_0}$ der Nullvektor ist, ist auch leicht zu sehen: sei $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in D_-^{r_0}$ (d.h. $\text{supp} f \subset (-\infty, -r_0]$), dann ist $U_{t < 0} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_t \end{pmatrix}$, d.h. die Elemente in $U_{t < 0}(D_-^{r_0})$ haben die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ f_t \end{pmatrix}$ mit $\text{supp} f_t \subset (-\infty, -(r_0 + |t|)]$. Damit $\begin{pmatrix} 0 \\ f_t \end{pmatrix}$ für alle Zeiten $t < 0$ in $U_t(D_-^{r_0})$ liegt, muß also $\text{supp} f \cap [-(r_0 + |t|), \infty)$ für alle $t < 0$ leer sein. Also muß f (fast) überall verschwinden.

(3) Der Beweis, daß die Vereinigung der U_t -Bilder von $D_-^{r_0}$ dicht in \mathcal{H} liegen, ist etwas aufwendiger. Wenn man zeigen kann, daß $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $M := \overline{\cup_t (U_t D_-^{r_0})}$ liegt, dann folgt die Behauptung daraus, daß U_t die *minimale* Dilation von $e^{-\lambda t}$ ist: dann ist nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zyklisch (d.h. $\text{LH} \{U_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$) und da mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auch $U_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \forall s$ in M liegt, ist also auch $\overline{M} = M = \mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Es ist also eine Folge in den U_t -Bildern von $D_-^{r_0}$ anzugeben, die gegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergiert. Dazu konstruiert man eine Folge $\begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix}_n \subset D_-^{r_0}$, für die gilt: Es gibt eine Folge $\mathbb{R}^+ \supset (T_n)_n \rightarrow \infty$, so daß $U_{T_n} \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Folge f_n wird wie folgt gewonnen: betrachte immer weiter in der Vergangenheit liegende Urbilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. Vektoren $\begin{pmatrix} z_n \\ g_n \end{pmatrix} := U_{-t_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für eine Folge $t_n \rightarrow \infty$. g_n ist eine Funktion mit $\text{supp} g_n \subset \mathbb{R}^-$. Um $\begin{pmatrix} z_n \\ g_n \end{pmatrix}$ zu einer Folge von Elementen in $D_-^{r_0}$ zu machen, muß g_n noch um r_0 Einheiten nach links geschoben werden und dann auf die zweite Komponente des Vektors projiziert werden: $D_-^{r_0} \ni \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix} := P_{Bad} U_{-r_0}^{(0)} \begin{pmatrix} z_n \\ g_n \end{pmatrix} = P_{Bad} U_{-r_0}^{(0)} U_{-t_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da für $t_n \rightarrow \infty$ z_n immer kleiner wird, ist zu erwarten, daß die Projektion P_{Bad} immer weniger „kaputtmacht“, die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix}$ dem $U_{t_n+r_0}$ -Urbild von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ immer ähnlicher werden und die

Vektoren $U_{t_n+r_0} \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix}$ gegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergieren. Eine kurze Rechnung zeigt, daß diese Überlegung korrekt ist. Also liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\overline{\cup_t(U_t(D_-^{r_0}))}$. Wie oben gezeigt ist damit dank der Zyklizität von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Eigenschaft (3) schon bewiesen. ■

Ein Zustand aus dem einlaufenden Teilraum $D_-^{r_0}$ tritt also frühestens nach r_0 Zeiteinheiten mit dem Streutarget im Wechselwirkung.

Der auslaufende Teilraum $D_+^{r_0}$ enthält Zustände, deren Zukunft durch die freie Zeitentwicklung bestimmt wird, und die schon seit r_0 Zeiteinheiten nicht mehr in Wechselwirkung mit dem Streutarget stehen.

Die Wellenoperatoren

Satz 1.3.2 (Berechnung der Wellenoperatoren)

Die Wellenoperatoren $W_-, W_+ : \mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ und ihre Inversen $\Omega_-, \Omega_+ : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (vgl. Def. 1.3.1) existieren und sind unitär. Sie sind gegeben durch

$$W_- = \left(\begin{array}{l} z \mapsto i\sqrt{\gamma}e^{-\bar{\lambda}x}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)z \quad f \mapsto f + \gamma e^{-\bar{\lambda}x} \int_0^{-x} e^{-\bar{\lambda}s} f(-s) ds \chi_{\mathbb{R}^+}(x) \end{array} \right), \quad (1.22)$$

$$W_+ = \left(\begin{array}{l} z \mapsto -i\sqrt{\gamma}e^{\lambda x}\chi_{\mathbb{R}^-}(x)z \quad f \mapsto f - \gamma e^{\lambda x} \int_0^{-x} e^{\lambda s} f(-s) ds \chi_{\mathbb{R}^-}(x) \end{array} \right), \quad (1.23)$$

$$\Omega_- = \left(\begin{array}{l} f \mapsto -i\sqrt{\gamma} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda s} f(s) ds \\ f \mapsto f - \gamma e^{\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda s} f(s) ds \chi_{\mathbb{R}^+}(x) \end{array} \right), \quad (1.24)$$

$$\Omega_+ = \left(\begin{array}{l} f \mapsto i\sqrt{\gamma} \int_{\mathbb{R}^-} e^{\bar{\lambda}s} f(s) ds \\ f \mapsto f - \gamma e^{-\bar{\lambda}x} \int_{-\infty}^x e^{\bar{\lambda}s} f(s) ds \chi_{\mathbb{R}^-}(x) \end{array} \right). \quad (1.25)$$

Beweis: Der Beweis wird für W_+, Ω_+ geführt, für W_-, Ω_- geht er analog.

Um die Behauptung zu beweisen, rechnet man die Existenz des Grenzwerts auf drei Teilräumen (D_+^0, D_-^0 und $\{\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C}\}$), die zusammen \mathcal{H} aufspannen, nach.

(1) Auf $D_+^{r_0}$ wirkt U_t für positives t genauso wie $U_t^{(0)}$. Daher ist W_+ auf diesem Teilraum die Identität: $W_+(D_+^{r_0}) = D_+^{r_0}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ f|_{\mathbb{R}^+} \end{pmatrix} \xrightarrow{W_+} \begin{pmatrix} 0 \\ f|_{\mathbb{R}^+} \end{pmatrix}$.

(2) $U_{-t}^{(0)}U_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i\sqrt{\gamma}e^{\lambda x}\chi_{[-t,0]}(x)$. Der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ existiert und ist $-i\sqrt{\gamma}e^{\lambda x}\chi_{\mathbb{R}^-}(x) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^-)$. Also: $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{W_+} \begin{pmatrix} 0 \\ x \mapsto -i\sqrt{\gamma}e^{\lambda x}\chi_{\mathbb{R}^-}(x)z \end{pmatrix} \in D_-^0$.

(3) Es genügt, W_+ auf einem dichten Teilraum von D_-^0 zu betrachten, z.B. auf dem der Funktionen mit kompaktem Träger. Sei $R > 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in D_-^0$ mit $\text{supp} f \subset [-R, 0]$. Dann gilt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} U_{-t}^{(0)} U_t \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} &= U_{-R}^{(0)} U_{-(t-R)}^{(0)} U_{t-R} \underbrace{U_R \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix} w \\ g \end{pmatrix}: g \in L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &= U_{-R}^{(0)} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} + U_{-(t-R)}^{(0)} U_{t-R} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Damit ist der Fall (3) auf die Fälle (1) und (2) zurückgeführt. w und g sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} w \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\gamma}e^{-\lambda R} \int_0^R e^{\lambda s} f(-s) ds \\ S_R \left(f - \gamma e^{\lambda x} \chi_{[-R,0]}(x) \int_0^{-x} e^{\lambda s} f(-s) ds \right) \end{pmatrix}.$$

Der $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{-t}^{(0)} U_t \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ existiert und ist $\begin{pmatrix} f - \gamma e^{\lambda x} \int_0^{-x} e^{\lambda s} f(-s) ds \chi_{\mathbb{R}^-(x)} \\ 0 \end{pmatrix} \in D_-^0$.

W_+ ist nach Definition offensichtlich normerhaltend, also injektiv. W_+ ist surjektiv, da – wie man schnell nachrechnet – $\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \exists \Omega_+ f \in \mathcal{H}$ sodaß $W_+(\Omega_+ f)$. Also ist $W_+ : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ unitär und $(W_+)^{-1} = \Omega_+$. ■

Die Wellenoperatoren W_{\pm} ermöglichen es, das asymptotische Verhalten jedes gegebenen Zustands zu bestimmen. Mittels der Operatoren Ω_{\pm} , läßt sich zu gegebenem asymptotischen Verhalten (z.B. „das System wurde (in der fernen Vergangenheit) im freien Zustand ψ_{in} präpariert“) berechnen, wie der zugehörige Streuzustand aussieht.

Dazu ist die folgende Eigenschaft der Wellenoperatoren nützlich

$$\begin{aligned} U_s \Omega_{\pm} &= \Omega_{\pm} U_s^{(0)} \\ U_s^{(0)} W_{\pm} &= W_{\pm} U_s, \end{aligned} \tag{1.26}$$

die es erlaubt, die Zeitentwicklung eines Streuzustands $\Omega_{\pm} \psi_{\pm}$ auf die freie Zeitentwicklung des (freien) Zustands ψ_{\pm} zurückzuspielen. (Zum Beweis: $U_s(\lim_t U_t U_{-t}^{(0)}) = \lim_t U_{t+s} U_{-t}^{(0)} \stackrel{r=t+s}{=} (\lim_r U_r U_{-r}^{(0)}) U_s^{(0)}$ usw.)

Gelegentlich ist es günstig, die Wellenoperatoren als Abbildungen von \mathcal{H} nach \mathcal{H} zu betrachten, indem $L^2(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{H}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : z = 0 \right\}$ identifiziert wird. Dann sind W_{\pm} injektiv und isometrisch aber nicht surjektiv und Ω_{\pm} surjektiv und isometrisch aber nicht injektiv.

Der Streuoperator

Mit den Wellenoperatoren läßt sich jetzt auch der *Streuoperator*

$$S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} S &:= W_+(W_-)^{-1} = W_+\Omega_- \\ S &= \left(f \mapsto f - \gamma e^{\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda s} f(s) ds \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

bestimmen. Der inverse Streuoperator $S^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, der einem auslaufenden freien Zustand den zugehörigen einlaufenden zuordnet ist

$$S^{-1} = \left(f \mapsto f - \gamma e^{-\bar{\lambda} x} \int_{-\infty}^x e^{\bar{\lambda} s} f(s) ds \right).$$

Im Frequenzbild nimmt der Streuoperator eine besonders einfache Form an. Der fouriertransformierte Operator \hat{S} ist durch die Multiplikation mit einer unimodularen Funktion σ gegeben:

$$\hat{S} = \left(\hat{f} \mapsto \frac{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} \hat{f} \right). \quad (1.28)$$

Die Wechselwirkung mit dem eindimensionalen System bewirkt also eine frequenzabhängige Phasenverschiebung der Umgebungsanregung.

Input-Output-Beziehung im Rahmen der Streutheorie

Die Input-Output-Relation 1.15 ist eine Randbedingung, der zwei unabhängig voneinander (bei endlichen Zeiten t_0, t_1) spezifizierte Anfangsbedingungen der Schrödingergleichung 1.12 genügen müssen, damit sie zur selben Lösung gehören. Der Grenzfall $t_0 \rightarrow -\infty, t_1 \rightarrow +\infty$ läßt sich nun leicht angeben: die *freien Zustände* f_0 und f_1 müssen über den Streuoperator in Beziehung stehen: $f_1 = S f_0$. Im Fourierbild heißt das:

$$f_{out}(\omega) = \hat{S} f_{in}(\omega) = \frac{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f_{in}(\omega). \quad (1.29)$$

Während diese Gleichung die ein- und auslaufenden freien Zustände in Beziehung setzt, die zum selben Streuzustand gehören, gibt die Gleichung 1.18 im Grenzfall $t_{0/(1)} \rightarrow -/(+)\infty$ eine Bedingung an, die die zum selben freien Zustand f gehörenden *ein- und auslaufenden Streuzustände* erfüllen:

$$U_t \Omega_- f - U_t \Omega_+ f = \Omega_- U_t^{(0)} f - \Omega_+ U_t^{(0)} f = -i\sqrt{\gamma} \int_{\mathbb{R}} U_s \begin{pmatrix} f(s-t) \\ 0 \end{pmatrix} ds. \quad (1.30)$$

1.3.2 Zweitquantisierung der Wellenoperatoren

Wie die Zeitentwicklung U_t so lassen sich auch die Wellenoperatoren und der Streuoperator zweitquantisieren: $\alpha_{\Omega_{\pm}}(W(f)) := W(\Omega_{\pm}(f))$ usw. Entsprechend transformieren sich (sofern sie definiert sind) die Feldoperatoren und die Erzeuger und Vernichter.

Wie sind die Bogoliubov-Transformationen $\alpha_{\Omega_{\pm}}, \alpha_{W_{\pm}}$ bzw. die zu ihnen dualen Transformationen $\nu_{\Omega_{\pm}}, \nu_{W_{\pm}}$ zu interpretieren?

Zunächst ist zu beachten, daß sie keine Automorphismen auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ sind, da W_{\pm}, Ω_{\pm} unitäre Abbildungen zwischen *verschiedenen* Hilberträumen $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R})$ sind.

$$\alpha_{W_{\pm}} : \text{CCR}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{CCR}(\mathcal{H}_0) \quad W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \mapsto W(W_{\pm} \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix})$$

und

$$\alpha_{\Omega_{\pm}} : \text{CCR}(\mathcal{H}_0) \rightarrow \text{CCR}(\mathcal{H}) \quad W(f) \mapsto W(\Omega_{\pm}f)$$

sind C^* -Algebra-Isomorphismen.

\mathcal{H}_0 läßt sich kanonisch mit einem Teilraum von \mathcal{H} identifizieren und $\text{CCR}(\mathcal{H}_0)$ entsprechend mit einer Unteralgebra von $\text{CCR}(\mathcal{H})$: $\text{CCR}(\mathcal{H}_0) \cong 1 \otimes \text{CCR}(L^2(\mathbb{R})) \cong \text{Alg}\{W_f^{(0)} : f \in L^2(\mathbb{R})\} \subset \text{CCR}(\mathcal{H})$.

Insofern können $\alpha_{W_{\pm}}$ als Abbildungen von $\text{CCR}(\mathcal{H})$ in sich aufgefaßt werden, die injektiv, aber nicht surjektiv sind. Um auch $\alpha_{\Omega_{\pm}}$ als eine Abbildung auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ aufzufassen, definiert man $\tilde{\alpha}_{\Omega_{\pm}} W_f^{(z)} := \varphi_0(W(z))\alpha_{\Omega_{\pm}} W(f)$ mit einem geeigneten Zustand φ_0 auf $\text{CCR}(\mathbb{C})$, z.B. dem Fockzustand. $\tilde{\alpha}_{\Omega_{\pm}}$ ist nun eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$.

Analog zur in Abschnitt 1.3.1 eingeführten Sprechweise für Zustände (im Hilbertraum \mathcal{H}) seien die Observablen in $\text{CCR}(\mathcal{H}_0)$ als *freie Observablen* bezeichnet. Sie beschreiben Messungen, die nur das Feld in der Umgebung betreffen. Die Bilder der freien Observablen unter $\alpha_{\Omega_{\pm}}$ können dann *Streuobservablen* genannt werden.

Auf \mathcal{H} galt:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} - U_t^{(0)} W_{\pm} \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} = 0 \quad (I)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_t \Omega_{\pm} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} - U_t^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = 0 \quad (II)$$

$$\begin{aligned} U_s \Omega_{\pm} &= \Omega_{\pm} U_s^{(0)} \\ U_s^{(0)} W_{\pm} &= W_{\pm} U_s. \end{aligned} \quad (III)$$

Was läßt sich aus diesen Beziehungen über das Zeitverhalten der Observablen $\alpha_{W_{\pm}} \left(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right)$ ableiten?

Heisenbergbild

Da die Zuordnung $f \mapsto W(f)$ nicht normstetig ist, überträgt sich die Konvergenz im Testfunktionenraum nicht ohne weiteres auf die Weyloperatoren. Stattdessen muß man sich z.B. in eine geeignete¹² Darstellung begeben und die Konvergenz in der starken Operatortopologie auf dem Darstellungshilbertraum formulieren. Dann läßt sich unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 1.3.1 zeigen, daß im Heisenbergbild gilt:

$$\alpha_{W_{\pm}} \circ \alpha_t W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \stackrel{(I)}{=} \alpha_t^{(0)} \circ \alpha_{W_{\pm}} W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$$

und

$$\alpha_t^{(0)} \circ \alpha_{W_{\pm}} W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \alpha_t W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}.$$

Das heißt, $\alpha_{W_{\pm}}$ ordnet jeder Observablen $\alpha_t W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \in \text{CCR}(\mathcal{H})$ die freie Observable $\alpha_t^{(0)} \left(\alpha_{W_{\pm}} W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) \in \text{CCR}(\mathcal{H}_0)$ zu, der sich $\alpha_t W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$ für $t \rightarrow \pm\infty$ asymptotisch annähert.

Soll also die Observable $W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$ beobachtet werden, so kann die Messung für sehr große (sehr negative) Zeiten auch durch die freie Observable $\alpha_t^{(0)} \left(\alpha_{W_{+/-}} W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right)$ beschrieben werden, denn es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi \left(\alpha_t W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) - \varphi \left(\alpha_t^{(0)} \left(\alpha_{W_{\pm}} W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) \right) = 0, \quad (1.31)$$

zumindest für alle Zustände mit gleichmäßig stetigem charakteristischen Funktional. (Denn für solche Zustände kann aus $\|f_n - g_n\| \rightarrow 0$ auf $|C_{\varphi}(f_n) - C_{\varphi}(g_n)| \rightarrow 0$ geschlossen werden.)

In der Praxis hat man es aber immer mit Streuobservablen in $\text{CCR}(\mathcal{H})$ zu tun, die Annahme „freier“ Observablen oder Zustände ist eine Idealisierung. Mit den Bogoliubov-Transformationen $\alpha_{\Omega_{\pm}}$ kann die Streuobservable bestimmt werden, die ein vorgegebenes asymptotisches Verhalten zeigt (sich nämlich für $t \rightarrow \pm\infty$ wie $\alpha_t^{(0)} W(f)$ verhält).

¹²Geeignet sind z.B. alle GNS-Darstellungen zu einem Zustand mit beschränktem charakteristischem Funktional.

Schrödingerbild

Die zu $\alpha_{W_{\pm}}, \alpha_{\Omega_{\pm}}$ dualen Transformationen sind

$$\nu_{W_{\pm}} : \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}_0)) \rightarrow \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H})) \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha_{W_{\pm}}$$

und

$$\nu_{\Omega_{\pm}} : \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H})) \rightarrow \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}_0)) \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha_{\Omega_{\pm}}.$$

Mit der Identifikation $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}_0)) \ni \varphi \longleftrightarrow \varphi_0 \otimes \varphi \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ für einen beliebigen Zustand $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathbb{C}))$ können $\nu_{\Omega_{\pm}}$ als (injektive, aber nicht surjektive) Abbildungen von $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ in sich aufgefaßt werden. Noch allgemeiner könnte man φ mit einem beliebigen Zustand ψ auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ identifizieren, der auf den freien Observablen mit φ übereinstimmt ($\psi(W_f^{(0)}) = \varphi(W(f)) \forall f \in \mathcal{H}_0$). Die Transformationen $\nu_{W_{\pm}}$ lassen sich durch $C_{\nu_{W_{\pm}}(\psi)} := C_{\varphi} \circ W_{\pm}$ auf ganz $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ definieren. Dadurch werden *alle* Zustände ψ , mit denen φ identifiziert werden könnte, von $\nu_{W_{\pm}}$ auf denselben Streuzustand $\nu_{W_{\pm}}(\varphi)$ abgebildet. $\nu_{W_{\pm}}$ ist somit eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung auf $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$.

Nun läßt sich Gl. (1.31) im Schrödingerbild ausdrücken (wobei φ ein mit einem freien Zustand identifizierbarer Streuzustand ist):

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \nu_t(\varphi) \left(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) = \nu_{W_{\pm}}(\nu_t^{(0)}(\varphi)) \left(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) \quad (1.32)$$

oder unter Verwendung von (III) nur mit der gestörten Zeitentwicklung:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \nu_t(\varphi) \left(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) - \nu_t \circ \nu_{W_{\pm}}(\varphi) \left(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (1.33)$$

Beide Gleichungen gelten zumindest für alle Zustände mit gleichmäßig stetigem charakteristischen Funktional (also z.B. für quasifreie Zustände, die durch beschränkte Linear- und Bilinearformen gegeben sind). Ist C_{φ} nicht glm. stetig, so ist die Konvergenz im Einzelfall zu prüfen (vgl. Beispiel 1.3.3).

$\nu_{W_{\pm}}$ weist also einem Zustand φ auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ einen anderen Zustand $\nu_{W_{\pm}}(\varphi)$ zu, der sich asymptotisch genauso verhält wie φ und „vergißt“ dabei den Anfangszustand im Resonator.

Dieses Verhalten ist für ein zusammengesetztes System wie das vorliegende zu erwarten: unabhängig vom ursprünglichen Zustand des kleinen Teilsystems wird der Zustand, dem sich das Gesamtsystem in der fernen Zukunft annähert, allein durch den Zustand der Umgebung bestimmt.

Beispiel 1.3.1 (Erreichen des thermischen Gleichgewichts)

Sei $\varphi = \varphi_S \otimes \varphi_{Temp}$, d.h. die Umgebung befinde sich in einem Temperaturzustand¹³ (mit charakteristischem Funktional $C_{\varphi_{Temp}}(f) = e^{-\frac{c}{2}\|f\|^2}$) und der Hohlraum in einem beliebigen Zustand φ_S .

In der fernen Zukunft ($t \rightarrow \infty$) verhält sich der Zustand des zusammengesetzten Systems asymptotisch wie $\nu_t \circ \nu_{W_+}(\varphi)$; dessen charakteristisches Funktional ist: $C_{\nu_t \circ \nu_{W_+}(\varphi)} = C_{\varphi_{Temp}} \circ W_+ U_t = \binom{z}{f} \mapsto e^{-\frac{c}{2}\|W_+ U_t \binom{z}{f}\|^2}$. Da U_t, W_+ unitär sind, ist $\|W_+ U_t \binom{z}{f}\| = \|\binom{z}{f}\|$ und somit ist

$$C_{\nu_t \circ \nu_{W_+}(\varphi)} \left(\binom{z}{f} \right) = e^{-\frac{c}{2}\|\binom{z}{f}\|^2},$$

d.h. Umgebung und Resonator haben nun beide die gleiche, durch c bestimmte Temperatur. (Es gilt: $c = \coth(\beta E)$, wobei $\beta \propto \frac{1}{T}$ und $E = \omega_0$.)

Es genügt daher zu spezifizieren, in welchem Zustand sich die Umgebung befindet, um den Limes des Zustands festzulegen: man „präpariert das Bad im Zustand φ_B “ und kann dann mittels ν_{W_\pm} berechnen, in welchem Zustand sich das System nach Erreichen des „Gleichgewichts“ befindet.

Die Transformationen ν_{Ω_\pm} erlauben es umgekehrt, zu einem gegebenen Streuzustand φ den Umgebungszustand $\nu_{\Omega_\pm}(\varphi) \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}_0))$ zu bestimmen, dessen „Präparation“ (in der Vergangenheit bzw. Zukunft) unter der Zeitentwicklung ν_t zum „Gleichgewichtszustand“ φ führt.

Beispiel 1.3.2 (Präparation eines Glauberzustands)

So könnte man sich fragen, in welchem Zustand φ das Bad (in der fernen Vergangenheit) präpariert worden sein müßte, um „jetzt“ (sehr viel später) ein System im Glauberzustand zur Testfunktion $\binom{w}{g} \in \mathcal{H}$ vorzufinden.

Beantwortet wird die Frage durch ν_{Ω_+} : der Zustand $\tilde{\varphi} = \varphi_S \otimes \nu_{\Omega_+}(e^{\binom{w}{g}})$ zeigt (für beliebige Systemzustände φ_S) das gewünschte asymptotische Verhalten. Man rechnet leicht nach, daß $\nu_{\Omega_+}(e^{\binom{w}{g}})$ ein Glauberzustand auf $\text{CCR}(\mathcal{H}_0)$ ist.

¹³Üblicherweise wird der eichinvariante quasifreie Zustand φ_β mit charakteristischem Funktional $C_{\varphi_\beta}(f) = \exp(-\frac{1}{2}\langle f, (1 + e^{-\beta H})(1 - e^{-\beta H})^{-1} f \rangle)$ als Gleichgewichtszustand eines Systems mit Hamiltonian H zur Temperatur $T \propto \beta^{-1}$ bezeichnet (vgl. BRATTELI, ROBINSON, *Operator Algebras ... II*, Springer, Prop. 5.2.28). Im Modell des weißen Rauschens wird H durch den konstanten Wert E ersetzt. Diese Vereinfachung wird dadurch gerechtfertigt, daß nur Observablen zu solchen Testfunktionen f betrachtet werden, für die $Hf \approx Ef$ (Schmalbandapproximation, vgl. S.9).

Beweis: Sei $\varphi := \varphi_S \otimes \nu_{\Omega_+}(e(\frac{w}{g}))$, dann gilt nach Gl. (1.33):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\varphi)(W(\frac{z}{f})) = \lim_t \nu_t(\nu_{W_+}(\varphi))(W(\frac{z}{f})) = \lim_t C_\varphi(W_+ U_t(\frac{z}{f})) = \lim_t C_{\varphi_S}(0) C_{e(\frac{w}{g})}(\Omega_+ W_+ U_t(\frac{z}{f})) = \lim_t \nu_t(e(\frac{w}{g}))(W(\frac{z}{f})).$$

Das charakteristische Funktional von φ ist

$$C_\varphi(\frac{z}{f}) = C_{\varphi_S}(z) C_{\nu_{\Omega_+}(e(\frac{w}{g}))}(f) = C_{\varphi_S}(z) e^{-\frac{1}{2}\|\Omega_+ f\|^2 + i2\text{Im}\langle \frac{w}{g}, \Omega_+ f \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2 + i2\text{Im}\langle W_+(\frac{w}{g}), f \rangle}.$$

Das Bad ist also im Glauberzustand zur Testfunktion $W_+(\frac{w}{g}) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ zu präparieren.

Noch ein paar Worte zur Bezeichnung von $\nu_{W_\pm}(\varphi)$ als „Gleichgewichtszustand“:

- Damit ist *nicht* gemeint, daß die Erwartungswerte aller Observablen konstant sind. $\nu_{W_\pm}(\varphi)$ ist in der Regel *kein* zeitinvarianter Zustand unter der Dynamik ν_t .
- $\nu_{W_\pm}(\varphi)$ ist Gleichgewichtszustand in dem Sinne, daß er das Gesamtsystem beschreibt, nachdem die (sehr lange andauernde) Wechselwirkung den irrelevanten Anteil der Anfangsbedingung (nämlich den Zustand im Resonator) überdeckt hat. ν_{W_\pm} beschreibt – in einer Analogie aus der Mechanik – das zusammengesetzte System *nach Ende des Einschwingvorgangs*.
- Anders als die Zustände $W_\pm(\frac{z}{f})$ im Hilbertraum unterliegt $\nu_{W_\pm}(\varphi)$ der *gestörten* Zeitentwicklung ν_t .
- Anders als in der Hilbertraum-Streutheorie ist der Resonator nicht in irgendeiner Weise „leer“. Es ist $\nu_{W_\pm}(\varphi) \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ (nicht $\in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}_0))$) und die Erwartungswerte der Feldoperatoren $\Phi(\frac{z}{0})$ verschwinden z.B. nicht, wenn $\varphi = e(g)$ mit $\text{Im}\langle g, W_+(\frac{z}{0}) \rangle \neq 0$.

Natürlich kann man die Wellenoperatoren auch auf Zustände wirken lassen, deren charakteristisches Funktional nicht gleichmäßig stetig ist. Dann kann jedoch nicht mehr ohne weiteres aus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_{-t}^{(0)} U_t \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} - W_+ \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}\| = 0 \quad (*)$$

auf

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\nu_t \circ \nu_{-t}^{(0)}(\varphi)(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}) - \nu_{W_+}(\varphi)(W \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix})| = 0 \quad (**)$$

geschlossen werden. Es ist vielmehr für jede Observable zu prüfen, ob die in Gl. (1.33) behauptete Konvergenz der Erwartungswerte gilt. Dies soll jetzt

am Beispiel eines Zustandes, der eine ebene Welle beschreibt, vorgeführt werden.

Der quasifreie, kohärente Zustand, der eine ebene Welle der Frequenz ω_e und der Energiedichte w beschreibt, wird in [14] konstruiert und untersucht. Er ist nicht auf ganz $\text{CCR}(\mathcal{H}_0)$, sondern nur auf der CCR-Algebra über dem Prähilbertraum der schnellfallenden Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert. Sein charakteristisches Funktional ist

$$\varphi_{EW}(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|^2 + i2w\text{Im}L_{\omega_e}(f)\right).$$

Dabei ist L_ω die Punktauswertung an der Stelle ω .

Beispiel 1.3.3 (Streuung einer ebenen Welle am Hohlraum I)

Im Zustand φ_{EW} gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} |\nu_t \circ \nu_{-t}^{(0)}(\varphi)(W(z_f)) - \nu_{W_+}(\varphi)(W(z_f))| = 0$. Der Beweis erfolgt, indem gezeigt wird, daß $U_{-t}^{(0)}U_t(z_f)$ punktweise gegen $W_+(z_f)$ konvergiert.

Unter Verwendung der Ausdrücke aus Anhang B (S. 94) ist für $t \geq 0$:

$$U_{-t}^{(0)}U_t(z_f) = \left(f - i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{\lambda - i\omega} \left(1 - \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\sqrt{\gamma}t} \int_0^t e^{\lambda s} \check{f}(-s) ds}{e^{-(\lambda - i\omega)t} z - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda - i\omega} \int_{-t}^0 e^{-i\omega x} \check{f}(x) dx + \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\lambda - i\omega)t}}{\lambda - i\omega} \int_0^t e^{\lambda x} \check{f}(-x) dx} \right) \right).$$

Die Systemkomponente und die unterstrichenen Terme der Backkomponente konvergieren für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^0 e^{-i\omega x} \check{f}(x) dx = \widehat{\check{f}}\chi_{[-t,0]}(\omega)$ konvergiert für alle ω gegen $\widehat{\check{f}}\chi_{\mathbb{R}^-}(\omega)$.

Auf $\text{CCR}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ gilt damit: $\varphi_{EW}(\alpha_{W_+}W(f)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{EW}(\alpha_{-t}^{(0)} \circ \alpha_t W(f))$.

Wird also die Umgebung im Zustand $\varphi_{EW} \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{S}(\mathbb{R})))$ präpariert, dann ist der Zustand des Gesamtsystems nach Ende des „Einschwingvorgangs“ durch $\nu_{W_+}(\varphi_{EW}) \in \mathcal{S}(\text{CCR}(\mathbb{C} \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})))$ gegeben. Das heißt, die oben gegebene Interpretation gilt auch für φ_{EW} , obwohl $C_{\varphi_{EW}}$ nicht glm. stetig ist.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \nu_{W_+}(\varphi_{EW})(W(z_f)) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\|W_+(z_f)\|^2 + iw2\text{Im}(L_{\omega_e}(W_+(z_f)))\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\|z_f\|^2 + i2\text{Im}\left\langle \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{w}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_e - \omega_0)}, z \right\rangle + iw2\text{Im}\left(\widehat{\check{f}}\chi_{\mathbb{R}^+}(\omega_e) + \frac{i(\omega_e - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}{i(\omega_e - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} \widehat{\check{f}}\chi_{\mathbb{R}^-}\right)\right). \end{aligned}$$

Dieser Zustand ist ein Produktzustand auf $\mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^-) \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$. Im Resonator stellt sich ein kohärenter Zustand ein, auf den auslaufenden Testfunktionen ändert sich der Zustand nicht und die einlaufenden Testfunktionen (mit $\text{supp} f \subseteq \mathbb{R}^-$) erfahren eine frequenzabhängige Phasenschiebung.

Streuoperator

Die Zweitquantisierung ν_S des Streuoperators $S = W_+\Omega_- : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ vermittelt wie gehabt zwischen den ein- und auslaufenden freien Zuständen:

$$\nu_S(\nu_{\Omega_+}(\varphi)) = \nu_{\Omega_-}(\varphi).$$

Damit läßt sich schnell bestimmen, welcher auslaufende freie Zustand zur im vorigen Beispiel beschriebenen ebenen Welle gehört.

Beispiel 1.3.4 (Streuung einer ebenen Welle II)

Die Umgebung werde in einem Zustand φ_{EW} präpariert. Lange nach der Streuung am Hohlraum befindet sich das umgebende Feld dann im Zustand $\nu_S(\varphi_{EW})$, dessen charakteristisches Funktional durch

$$S(\mathbb{R}) \ni f \mapsto e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2 + i2w\text{Im}\left(\frac{i(\omega_e - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}{i(\omega_e - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} L_{\omega_e}(f)\right)}$$

beschrieben, d.h. die Phase der ebenen Welle ist (für $\omega_e \neq \omega_0$) modifiziert worden.

Mit Lemma 4.12 aus [14] folgt, daß die Zustände φ_{EW} und $\nu_S(\varphi_{EW})$ disjunkt sind.

Daher besitzt die aus den GNS-Darstellungen zu φ und $\nu_S(\varphi)$ konstruierte Darstellung $\pi_\varphi \oplus \pi_{\nu_S(\varphi)}$ von $CCR(S(\mathbb{R}))$ ein nicht-triviales Zentrum.

Selbstadjungierte Operatoren im Zentrum können als klassische Observablen gedeutet werden, d.h. als Observablen, die mit allen übrigen Observablen kommutieren und deren Messung den Zustand des Systems nicht beeinträchtigt. Im Zentrum liegen auch Observablen (z.B. $\pi_\varphi(id) \oplus \pi_{\nu_S(\varphi)}(0)$) die es ermöglichen, zwischen den Zuständen φ_{EW} und $\nu_S(\varphi_{EW})$ unterscheiden. Daher sagt man auch, daß disjunkte Zustände klassisch unterscheidbar sind.

Input-Output-Beziehung

Die Zweitquantisierung von Gl. (1.18) liefert nun für $W(f) \in CCR(\mathcal{H}_0)$ eine Beziehung zwischen ein- und auslaufenden Streuobservablen:

$$\alpha_t \circ (\alpha_{\Omega_+} - \alpha_{\Omega_-})W(f) = i\sqrt{\gamma}W\left(\int_{\mathbb{R}} f(s-t)U_s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Für die Feldoperatoren $\Phi(f)$ gilt in einer regulären Darstellung entsprechend:

$$\begin{aligned} \alpha_t \circ (\alpha_{\Omega_+} - \alpha_{\Omega_-})\Phi(f) &= \\ \alpha_t \circ \alpha_{\Omega_+}\Phi(f) - \alpha_t \circ \alpha_{\Omega_-}\Phi(f) &= i\sqrt{\gamma}\Phi\left(\int_{\mathbb{R}} f(s-t)U_s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Für Erzeuger und Vernichter gilt damit:

$$A(\Omega_+ f)(t) - A(\Omega_- f)(t) = i\sqrt{\gamma} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(s-t)} a(s) ds. \quad (1.34)$$

Diese Input-Output-Relation ist die Entsprechung der formalen Beziehung (1.4). Man erhält diese aus Gl. (1.34), wenn man f durch die δ -Distribution bei $x = 0$ ersetzt.

Wird z.B. die Lösung der Heisenberg-Gleichung zur „asymptotisch spezifizierten Anfangsbedingung“ $A_f^{(z)}(\pm\infty) = A_g^{(0)}$ gesucht, so ist sie zur Zeit t gegeben durch $\alpha_t \alpha_{\Omega_{\pm}} A_g^{(0)}$.

Dies legt nahe,

$$A_{in}(f) := \alpha_{\Omega_-} A \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$A_{out}(f) := \alpha_{\Omega_+} A \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

als *Input- und Output-Operatoren* zu bezeichnen. Mit ihnen beschreibt man (im Heisenbergbild) das ein- bzw. auslaufende Streufeld, das für $t \rightarrow -/(+)\infty$ asymptotisch wie die f -Mode eines freien Feldes aussieht.

Gleichung (1.5) ist dagegen eine Relation zwischen den Fourierkomponenten der ein- und auslaufenden *freien* Felder. Man erhält sie durch Zweitquantisierung von Gl. (1.29): $W(f_{out}) = W(Sf_{in})$.

Oder für den Vernichter:

$$A(f_{out}) = A \left(\frac{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f_{in} \right). \quad (1.35)$$

Für eine Mode mit scharfer Frequenz $f_{in}(\omega') = \delta(\omega' - \omega)$ gilt

$$A(f_{out}) = \frac{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}}{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}} A(f_{in}),$$

die Beziehung (1.5) aus Abschnitt 1.1.

1.4 Der an mehrere Bäder gekoppelte Hohlraumresonator

Ohne großen Aufwand kann die Zahl der Wärmebäder, an die der Hohlraumresonator gekoppelt ist, erhöht werden. Der Einteilchen-Hilbertraum ist dann $\mathcal{H}^{(L)} := \mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \dots \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (L -mal der $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$). Elemente $(z, f^{(1)}, \dots, f^{(L)})$ von $\mathcal{H}^{(L)}$ werden kurz mit $(z, f^{(k)})$ bezeichnet.

Als Hamiltonian $H^{(L)}$ des markovsch (mit Kopplungskonstanten¹⁴ $\gamma_k, k = 1, \dots, L$) an L Bäder gekoppelten Resonators liegt es im Hinblick auf Gl. (1.11) nahe, folgende $(L + 1) \times (L + 1)$ -Blockmatrix anzusetzen.

$$H^{(L)} = \begin{pmatrix} z \mapsto \omega_0 & f^{(1)} \mapsto \sqrt{\gamma_1} f^{(1)}(0) & \dots & f^{(L)} \mapsto \sqrt{\gamma_L} f^{(L)}(0) \\ z \mapsto \sqrt{\gamma_1} z \delta(x) & f^{(1)} \mapsto -i \frac{d}{dx} f^{(1)} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ z \mapsto \sqrt{\gamma_L} z \delta(x) & 0 & \dots & -i \frac{d}{dx} f^{(L)} \end{pmatrix}.$$

$H^{(L)}$ ist definiert auf dem dichten Teilraum

$$\mathcal{D}(H^{(L)}) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{(L)} : f^{(k)}|_{\mathbb{R}^\pm} \in W^1(\mathbb{R}^\pm) \text{ und } f^{(k)}(0^+) - f^{(k)}(0^-) = -i\sqrt{\gamma_k} z \ \forall k \right\}.$$

Die von $H^{(L)}$ generierte Zeitentwicklung ist

$$U_t^{(L)} : \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix},$$

wobei für $t \geq 0$

$$z_t = e^{-\lambda t} z - i \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} f^{(l)}(-s) ds \quad (1.36)$$

und

$$f_t^{(k)} = -i\sqrt{\gamma_k} e^{\lambda(x-t)} z \chi_{[0,t]} + S_t f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} e^{\lambda(x-t)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^{t-x} e^{\lambda s} f^{(l)}(-s) ds \chi_{[0,t]}(x) \quad (1.37)$$

für alle $k = 1, \dots, L$ gilt. (Alle Summen in diesem Abschnitt laufen von $l = 1$ bis $l = L$.)

¹⁴Auch im Fall mehrerer Bäder können die Kopplungskonstanten κ_k oBdA als reell und positiv angesetzt werden, da sich die diesbzgl. Argumentation aus Abschnitt 1.2 offensichtlich auf L Bäder ausdehnen läßt.

$U_t^{(L)}$ ist im Fall $L > 1$ keine *minimale* Dilatation mehr. Es zeigt sich aber, daß sich der Resonator so verhält, als wenn er über einen Spiegel der Durchlässigkeit $\gamma = \sum \gamma_k$ an *ein* Bad gekoppelt wäre. Es kommt also qualitativ nichts Neues zum System aus Abschnitt 1.2 hinzu; anschaulich von Interesse ist aber z.B. der an zwei Wärmebäder gekoppelte Hohlraumresonator: er stellt einen einfachen Frequenzfilter dar. Daher wird noch angegeben, wie $U_t^{(L)}$ auf $U_t^{(1)}$ zurückgeführt werden kann.

Der folgende Satz präzisiert die Aussage, daß zum einseitigen Hohlraumresonator „nichts Neues hinzukommt“.

Satz 1.4.1 („ $U_t^{(L)} \cong U_t \oplus (\oplus_{l=1}^{L-1} S_t)$ “)

Der Einteilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}^{(L)}$ zerfällt in zwei zueinander senkrechte Teilräume $\mathcal{K}, \mathcal{K}^\perp$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\mathcal{H}^{(L)} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$.
- (2) $U_t^{(L)}\mathcal{K} = \mathcal{K}$ und $U_t^{(L)}\mathcal{K}^\perp = \mathcal{K}^\perp$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (3) $U_t^{(L)}$ eingeschränkt auf \mathcal{K} ist unitär äquivalent zur minimalen Dilatation von $e^{-(i\omega_0 + \frac{\gamma}{2})t}$ mit $\gamma = \sum_l \gamma_l$.
- (4) $U_t^{(L)}$ eingeschränkt auf \mathcal{K}^\perp ist unitär äquivalent zur Zeitentwicklung von $L - 1$ ungekoppelten Wärmebädern, d.h. zu $L - 1$ Kopien des Shifts.

Beweis: Der Beweis von (1)-(4) erfolgt durch Angabe von \mathcal{K} und der unitären Transformation V , die die Äquivalenzen (3),(4) vermittelt.

Der Teilraum \mathcal{K} ist genau der Teilraum, der von den Bildern des (nun nicht mehr zyklischen) Vektors $(1, 0, \dots, 0)$ unter $U_t^{(L)}$ aufgespannt wird. Die Kopplungen an die verschiedenen Bäder unterscheiden sich nur durch die Größe der Kopplungskonstanten γ_k voneinander. Daher führt die Zeitentwicklung von $(1, 0, \dots, 0)$ zu (bis auf einen Faktor $\sqrt{\gamma_k}$) identischen Anregungen in den Bädern. Also ist

$$\mathcal{K} := \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : f^{(k)} = \sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma_1}} f^{(1)} \right\}. \quad (1.38)$$

Die Invarianz von \mathcal{K} unter $U_t^{(L)}$ sieht man Gl. (1.37) direkt an: Unter der Zeitentwicklung werden die $f^{(k)}$ nach rechts verschoben und es wird ein Summand $\sqrt{\gamma_k}(-iz_{t-x}\chi_{[0,t]}(x))$ hinzuaddiert, der die Proportionalität der Bäder zueinander respektiert.

Da $U_t^{(L)}$ unitär ist, läßt es dann auch \mathcal{K}^\perp invariant.

Es bleibt noch, die Behauptungen (3) und (4) zu beweisen. Dies geschieht durch Angabe der Unitarität V . Ein beliebiges Element $\begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$\begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \frac{\sqrt{\gamma_k}}{\gamma} \sum_l \sqrt{\gamma_l} f^{(l)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} - \frac{\sqrt{\gamma_k}}{\gamma} \sum_l \sqrt{\gamma_l} f^{(l)} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

oder mit $F^{(1)} := \sum_l \sqrt{\frac{\gamma_l}{\gamma}} f^{(l)}$ als

$$\begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma}} F^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} - \sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma}} F^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Der erste Summand, $\begin{pmatrix} z \\ \sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma}} F^{(1)} \end{pmatrix}$, liegt in \mathcal{K} und der zweite, $\begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} - \sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma}} F^{(1)} \end{pmatrix}$, in \mathcal{K}^\perp . V soll nun so definiert werden, daß es den ersten Summanden unitär auf ein Element des $\mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ abbildet und den zweiten Summanden auf die direkte Summe von $L - 1$ $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ -Funktionen. Auf \mathcal{K} ist es offensichtlich, wie V zu definieren ist

$$V : \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma}} F^{(1)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{\gamma} F^{(1)} \end{pmatrix} \oplus 0,$$

auf \mathcal{K}^\perp ist es nicht so klar. Eine Möglichkeit ist die folgende: Sei $\{e_n : n = 1, \dots, L\}$ die kanonische Orthonormalbasis (ONB) des \mathbb{C}^L , sei $\{b_n : n = 1, \dots, L\} \subset \mathbb{C}^L$ eine andere ONB mit $b_1 := \left(\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}, \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma}}, \dots, \sqrt{\frac{\gamma_L}{\gamma}} \right)$ und sei $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB des $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Dann ist $B := \{f_n b_k : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, L\}$ zusammen mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine ONB von $\mathcal{H}^{(L)}$.

V wird nun durch seine Wirkung auf B definiert:

$$\begin{aligned} V \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus 0, \\ V f_n b_1 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ f_n \end{pmatrix} \oplus 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ V f_n b_k &:= 0 \oplus f_n e_{k-1} \quad \forall 1 < k \leq L, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Der Operator V bildet ONB auf ONB ab und ist daher unitär, und es gilt:

$$V U_t^{(L)} V^\dagger = U_t \oplus S_t^{(L-1)},$$

wobei $S_t^{(n)}$ der Rechtsshift mit Multiplizität n ist, und U_t die minimale unitäre Dilatation von $e^{-(i\omega_0 + \frac{\gamma}{2})t}$ (vgl. Gl. (1.7)) bezeichnet. \blacksquare

Ist also ein singularär an L Bäder gekoppelter Hohlraumresonator (mit Kopplungskonstanten γ_k) zu untersuchen, so ist der mit $U_t^{(L)}$ zeitentwickelte Vektor $(z_0, f_0^{(k)})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix} &= U_t^{(L)} \begin{pmatrix} z_0 \\ f_0^{(k)} \end{pmatrix} = V^\dagger V U_t^{(L)} V^\dagger V \begin{pmatrix} z_0 \\ f_0^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= V^\dagger \left(U_t \begin{pmatrix} z_0 \\ F_0^{(1)} \end{pmatrix} \oplus S_t^{(L-1)}(F_0^{(2)}, \dots, F_0^{(L)}) \right) \end{aligned} \quad (1.40)$$

mit $V, F^{(k)}$ wie oben.

Ebenso ergeben sich die Wellen- und Streuoperatoren $W_\pm^{(L)}, \Omega_\pm^{(L)}, S^{(L)}$ als unitär äquivalent zu $W_\pm \oplus id, \dots$, im wesentlichen also als die Operatoren aus Abschnitt 1.3.2 mit Kopplungskonstante $\gamma = \sum_l \gamma_l$.

Zweiseitiger Hohlraumresonator

Für den Fall $L = 2$ sei jetzt noch der Streuoperator angegeben. Fouriertransformation in allen Bädern läßt die Räume $\mathcal{K}, \mathcal{K}^\perp$ invariant und vertauscht mit V . Daher gilt die Gl. (1.40) auch, wenn die Funktionen im Frequenzbild angegeben werden. Da der Streuoperator dann einfacher ist, wird ab jetzt im Frequenzbild gerechnet. Es ist $F^{(1)} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} f^{(1)} + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma}} f^{(2)}$ und $F^{(2)} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} f^{(2)} - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma}} f^{(1)}$ sowie $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; $G^{(k)}$ bezeichne das Bild der Funktion $F^{(k)}$ unter S . Mit diesen Ausdrücken läßt sich der Streuoperator $S^{(2)}$ wie folgt schreiben.

$$\begin{aligned} S^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} &= V^\dagger V S^{(2)} V^\dagger \left(\begin{pmatrix} 0 \\ F^{(1)} \end{pmatrix} \oplus f^{(2)} \right) = V^\dagger \left(S \begin{pmatrix} 0 \\ F^{(1)} \end{pmatrix} \oplus F^{(2)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} G^{(1)} - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma}} F^{(2)} \\ \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma}} G^{(1)} + \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} F^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2} - \gamma_2}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f^{(1)} + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f^{(2)} \\ \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f^{(1)} + \frac{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2} - \gamma_1}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Damit läßt sich nun die Filterwirkung dieses Systems nachrechnen.

Beispiel 1.4.1 (Zweiseitiger Hohlraumresonator als Frequenzfilter)

Das Bad werde in dem zur Testfunktion $g = (g^{(1)}, 0)$ gehörenden Glauberzustand $e(g)$ präpariert, d.h. das zweite („rechte“) Bad befinde sich im Vakuumzustand und das erste („linke“) Bad in einem Glauberzustand zur Testfunktion $g^{(1)}$. Betrachtet wird nun die Teilchenzahl in einer Mode des rechten Reservoirs, d.h. die Observable $N(f) = A^\dagger(f)A(f)$ zu einer Testfunktion $f = (0, 0, f^{(2)})$, $\|f^{(2)}\| = 1$.

Der Erwartungswert von $N(f)$ im Zustand $\varphi_{e(g)}$ mit $f, g \in \mathcal{H}$ wie oben ist damit erwartungsgemäß gleich 0:

$$\varphi_{e(g)}(N(f)) = |\langle g, f \rangle|^2 = 0.$$

Nach der Streuung am Hohlraum befindet sich das Bad im Zustand $\nu_S(\varphi_{e(g)})$, für den gilt

$$\nu_S(\varphi_{e(g)})(N(f)) = \varphi_{e(g)}(N(Sf)) = |\langle g, Sf \rangle|^2.$$

Setzt man $S = S^{(2)}$ ein, so ergibt sich

$$\nu_S(\varphi_{e(g)})(N(f)) = \gamma_1 \gamma_2 \left| \int_{\mathbb{R}} \overline{g^{(1)}(\omega)} \frac{1}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f^{(2)}(\omega) d\omega \right|^2.$$

Wählt man beispielsweise speziell für $f^{(2)}$ eine (Approximation der) Deltafunktion bei $\omega = \omega'$, dann ergibt sich (angenähert)

$$\nu_S(\varphi_{e(g)})(N(f)) \propto \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\omega' - \omega_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2} |g^{(1)}(\omega')|^2,$$

die Besetzungsdichte der Moden wird also mit zunehmendem Abstand der betrachteten Frequenz ω' von ω_0 immer stärker reduziert.¹⁵ Die Abnahme wird durch eine Lorentzkurve mit Halbwertsbreite $\frac{\gamma}{2}$ beschrieben. Dieses Ergebnis rechtfertigt die Bezeichnung des zweiseitigen Hohlraumresonators als Lorentz-Frequenzfilter. Die beste Filterwirkung erhält man im Fall $\gamma_1 = \gamma_2$.

¹⁵Wird stattdessen die Besetzungszahl in einer Mode im linken Bad betrachtet, so ist diese nach der Streuung in der Umgebung von ω_0 am stärksten reduziert.

Kapitel 2

Erzeugung von gequetschtem Licht im parametrischen Resonator

Ziel dieses Kapitels ist es, die in den vorigen Abschnitten dargestellten Methoden auf ein anderes quantenoptisches System – den offenen *parametrischen Resonator* – anzuwenden. Parametrische Resonatoren sind von besonderem Interesse, da sie zur Erzeugung von *gequetschtem Licht* gut geeignet sind und sich (im Rahmen einiger plausibler Näherungen) durch eine *quasifreie Zeitentwicklung* beschreiben lassen.

Im folgenden werden kurz die im Zusammenhang mit gequetschten Zuständen vorkommenden Begriffe eingeführt und nach einer knappen, der quantenoptischen Literatur [2, 1] folgenden Beschreibung des parametrischen Resonators dessen Einteilchen-Zeitentwicklung U_t untersucht. U_t ist durch eine nicht mehr unitäre sondern nur noch symplektische¹ Gruppe gegeben. Auch für diese Zeitentwicklung existiert eine Streutheorie, so daß der Input-Output-Formalismus wieder als Zweitquantisierung der streutheoretischen Betrachtung von U_t verstanden werden kann.

2.1 Squeezed Light

Ein Zustand φ auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ wird als *gequetscht (squeezed)* bezeichnet, wenn die Varianz einer Observablen A kleiner ist als in einem Referenzzustand ω .

In diesem Sinne ist jedoch jeder Zustand gequetscht: es sind nur A und ω geeignet zu wählen. Es ist daher sinnvoll, Observable A und Referenzzustand ω in die Definition mit aufzunehmen, wie es in folgender Definition geschieht (die leicht verallgemeinert aus ([13], IV) übernommen ist).

¹Zur Definition von symplektischen Räumen und Abbildungen, siehe Anhang A.

Definition 2.1.1 (Gequetschte Zustände)

Seien φ, ω Zustände auf der Observablenalgebra \mathcal{A} und sei $M \subset \mathcal{A}$.
 Dann heißt φ M -gequetscht relativ zu ω , falls

$$\inf \{\text{Var}(\varphi, A) : A \in M\} < \inf \{\text{Var}(\omega, A) : A \in M\}.$$

Dabei ist $\text{Var}(\varphi; A) := \varphi(A^2) - (\varphi(A))^2$ die Varianz der Observablen A .

Das heißt, der Zustand ist squeezed, wenn die kleinste, bei den relevanten Observablen auftretende Schwankung geringer ist als im Referenzzustand. Meistens wird Squeezing bezüglich *einer* Observablen A betrachtet, d.h. es ist $M = \{A\}$. Gewöhnlich geht es speziell um die Schwankung eines Feldoperators $\Phi(f)$, die mit den Werten im Vakuumzustand φ_F verglichen wird.

Obwohl „rauschunterdrückte Zustände“ in der Quantenmechanik wohlbekannt sind, finden gequetschte Zustände des elektromagnetischen Feldes seit einigen Jahren in der Quantenoptik großes Interesse. Dafür sind wohl zwei Gründe ausschlaggebend: Zum einen läßt sich, wie CAVES *et.al.* 1980 zeigten (Rev. Mod. Phys., **52**, S.341f), durch die Verwendung von squeezed states die Genauigkeit von Interferometer-Experimenten verbessern: das Rauschen der Meßapparatur kann unter den Vakuum-Wert abgesenkt werden. Zum anderen stellen squeezed states das Paradebeispiel der sog. *nichtklassischen* Zustände des elektromagnetischen Felds dar. (Als *klassisch* werden in diesem Zusammenhang Zustände bezeichnet, die eine positive P-Darstellung besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie in der konvexen Hülle der Glauberzustände liegen. Diese Bezeichnung rührt daher, daß die Glauberzustände ein Feld beschreiben, das sich in vieler Hinsicht wie ein klassisches elektromagnetisches Feld verhält; in diesem Sinne „entsprechen“ die Zustände in der konvexen Hülle der Glauberzustände Ensembles klassischer Felder mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung P.)

SLUSHER *et.al.* (Phys. Rev. Lett., **55**, 2409ff) konnten 1985 erstmals gequetschtes Licht erzeugen. Eine umfangreiche Übersicht über *squeezed states of light* findet sich in [12] bzw. dem Sonderheft des J. Am. Opt. Soc. B, **4**, 1987.

Ideale gequetschte Zustände und der Squeeze-Operator

Üblicherweise (vgl. z.B. [2], Kap. 1, [11], Kap. 21) werden gequetschte Zustände im Fockraum über \mathbb{C} eingeführt und zwar in Form einer zweiparametrischen Familie von reinen Zuständen, die mit $|\alpha, \epsilon\rangle, \alpha \in \mathbb{C}, \epsilon = re^{i2\theta} \in \mathbb{C}$ bezeichnet werden. Im Zustand $|\alpha, \epsilon\rangle$ liegt die Varianz des Feldoperators $\Phi(e^{i\theta})$ um einen Faktor e^r unter und die der kanonisch konjugierten Observablen $\Phi(ie^{i\theta})$

um denselben Faktor über dem Vakuum-Wert, und das Produkt der beiden Unschärfen ist minimal („minimal uncertainty squeezed state“). Da also die Rauschunterdrückung in einer Observablen mit der kleinstmöglichen Rauschverstärkung in der konjugierten erkaufte wurde, heißen diese Zustände auch *ideale gequetschte Zustände*.

Jeder ideale gequetschte Zustand läßt sich durch eine quasifreie Transformation $\nu_{Q(\epsilon)}$ aus einem Glauberzustand gewinnen:

$$|\alpha, \epsilon\rangle := \nu_{Q(\epsilon)} |\alpha'\rangle.$$

Dabei ist die symplektische Abbildung $Q(\epsilon)$

$$Q(\epsilon = re^{i2\theta}): z \mapsto \cosh r z - e^{i2\theta} \sinh r \bar{z} \quad (2.1)$$

und $\alpha = Q(\epsilon)\alpha'$. (Abgesehen von einer Multiplikation mit einem Phasenfaktor sind alle symplektischen Transformationen auf \mathbb{C} von dieser Form.)

Man rechnet leicht nach, daß $\nu_{Q(\epsilon)}$ die Varianz der Observablen $\Phi(e^{i\theta})$ in allen Zuständen φ auf $\text{CCR}(\mathbb{C})$ um einen Faktor e^{-2r} reduziert und die der kanonisch konjugierten Observablen $\Phi(ie^{i\theta})$ um den Faktor e^{2r} vergrößert.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Phi(e^{i\theta}); \nu_{Q(\epsilon)}(\varphi)) &= \text{Var}(\alpha_{Q(\epsilon)}\Phi(e^{i\theta}); \varphi) \\ &= \text{Var}(e^{-r}\Phi(e^{i\theta}); \varphi) \\ &= e^{-2r}\text{Var}(\Phi(e^{i\theta}); \varphi) < \text{Var}(\Phi(e^{i\theta}); \varphi) \end{aligned}$$

und

$$\text{Var}(\Phi(ie^{i\theta}); \nu_{Q(\epsilon)}(\varphi)) = e^{2r}\text{Var}(\Phi(ie^{i\theta}); \varphi) > \text{Var}(\Phi(ie^{i\theta}); \varphi)$$

Alle transformierten Zustände $\nu_{Q(\epsilon)}(\varphi)$ sind also $\Phi(e^{i\theta})$ -gequetscht bezüglich φ .

$\nu_{Q(\epsilon)}$ ist der *Squeezing Operator*, der in [2, 11] (in der Fockdarstellung) angegeben und mit $S(\epsilon)$ bezeichnet wird.²

Allgemeiner heißt eine quasifreie Transformation ν_T , die einen Zustand ω in einen bezüglich ω gequetschten Zustand $\nu_T(\omega)$ überführt, *Squeezing-Abbildung (squeezing transformation)*. Ein physikalischer Prozeß, der durch eine solche Transformation beschrieben wird, kann daher als „quasifreies Squeezing“ bezeichnet werden. In den folgenden Abschnitten wird ein spezielles physikalisches System untersucht, das (nach einigen Näherungen) durch eine quasifreie Squeezing-Transformation beschrieben werden kann.

²Gewöhnlich werden die Zustände $|\alpha, \epsilon\rangle$ definiert durch $|\alpha, \epsilon\rangle := W(\alpha)S(\epsilon)|0\rangle$, wobei $W(\alpha)$ die Fockdarstellung des Weyloperators $W(\alpha) \in \text{CCR}(\mathbb{C})$ ist und $|0\rangle$ der (dargestellte) Fock-Zustand.

Für die Erzeugung gequetschten Lichts eignen sich vor allem Prozesse der *nichtlinearen Optik*, z.B. die *parametrische Verstärkung* (*parametric down conversion (PDC)*)³, die im folgenden Abschnitt kurz beschrieben wird.

2.2 Der parametrische Resonator auf dem Fockraum

In der klassischen Physik bezeichnet man das resonante Verhalten eines harmonischen Oszillators unter dem Einfluß einer periodischen Störung geeigneter Frequenz als *parametrische Resonanz*⁴.

Ein analoges Verhalten ist in der Quantenoptik in einem Hohlraumresonator, der mit einem nichtlinearen Medium gefüllt ist, zu beobachten, wenn das System durch Einstrahlung von Licht geeigneter Frequenz angetrieben wird.

Eine rigorose Quantisierung des elektromagnetischen Feldes in nichtlinearen Materialien ist bisher nicht gelungen. Die in der Literatur verwendeten Hamilton-Operatoren werden anhand des klassischen Ausdrucks für die Hamiltonfunktion in einem makroskopischen nichtlinearen Medium „erraten“ (vgl. z.B. [11], Kapitel 22 oder [12]), indem die klassischen Feldkomponenten durch die bei der Quantisierung des freien Feldes erhaltenen Ausdrücke (ausgedrückt durch Erzeuger und Vernichter) ersetzt werden. Wie in Abschnitt 1.1 wird der Hamilton-Operator also in der Fockdarstellung angegeben.

Um einen Hamilton-Operator zu erhalten, der einen Squeezing-Prozeß beschreibt, genügt es, die niedrigste Ordnung der nichtlinearen Wechselwirkung zwischen Feld und Medium zu berücksichtigen. Sie findet Ausdruck in einem Term \mathbb{H}_{PDC} , der zum Hamilton-Operator des „leeren“ Hohlraumresonators addiert wird und, anschaulich gesprochen, einen Drei-Photonen-Prozeß beschreibt, in dem ein hochfrequentes Photon in zwei niederfrequente Photonen übergeht und umgekehrt.

$$\mathbb{H}_{PDC} = \frac{i\hbar}{2} \sum_{k,l,m} \left(\chi_{klm}^{(2)} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m - \overline{\chi_{klm}^{(2)}} a_k a_l a_m^\dagger \right). \quad (2.2)$$

Die a_i bezeichnen die Vernichter von Eigenmoden des Hohlraums. Die Summe schließt alle (relevanten) Eigenmoden ein. Die Materialkonstanten $\chi_{klm}^{(2)}$

³Der Nachweis von Squeezing durch parametric down conversion gelang erstmals WU *et al.*, Phys. Rev. Lett., **57**, 2520 (1986). Weitere Prozesse zur Erzeugung gequetschten Lichts sind z.B. in [12] zusammengestellt.

⁴Eine schöne Darstellung der klassischen parametrischen Resonanz findet sich in [12].

beschreibt die nichtlineare Suszeptibilität des Mediums. Sie hängt (wie durch das Subskript angedeutet) von den beteiligten Moden ab.

Um zu einem einfachen Modell für die Erzeugung gequetschten Lichts zu gelangen, werden an diesem Hamilton-Operator zahlreiche „Näherungen“ vorgenommen, die zusammen zu einer quasifreien Zeitentwicklung führen. Wie in Abschnitt 1.1 können diese Modellannahmen hier nur motiviert werden. Wie „gut“ das Modell ist, muß sich im Vergleich mit dem Experiment erweisen.

Daß überhaupt von \mathbb{H}_{PDC} ausgegangen wird, impliziert schon die erste Näherung, nämlich die Vernachlässigung aller nichtlinearen Prozesse höherer Ordnung. Wie im vorigen Kapitel wird ein *eindimensionaler* Resonator und *eine* Polarisationsrichtung des Feldes betrachtet. Die Schwingungsmoden im Resonator sind damit durch ihre Energie E_k schon eindeutig festgelegt. In der *Drehwellennäherung* werden nun alle nicht energieerhaltenden Terme von (2.2) vernachlässigt, d.h. alle Summanden k, l, m mit $E_k \neq E_l + E_m$.

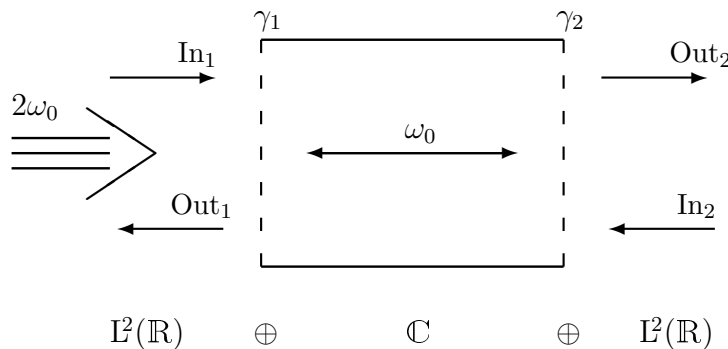


Abbildung 2.1: Der offene parametrische Resonator

Die wesentliche Modellannahme ist die *parametrische Näherung*: sie geht davon aus, daß der Resonator durch einen sehr intensiven Pumpstrahl der doppelten Grundfrequenz ω_0 angetrieben wird, und daß daher das Feld bei der Pumpfrequenz $2\omega_0$ *klassisch*, und zwar durch eine ebene Welle $E(t) = E_0 e^{-i2\omega_0 t}$, beschrieben werden kann (statt durch den Vernichter a_k). Dadurch vernachlässigt man die (klassischen und quantenmechanischen) Fluktuationen der Pumpintensität und die Modifikation des Pumpstrahls durch die

Wechselwirkung mit dem Kristall.⁵ Zusammen mit der Drehwellennäherung führt die parametrische Näherung zu einer quasifreien Dynamik.

Eine weitere Vereinfachung erreicht man, wenn man annimmt, daß sich die beiden erzeugten niederenergetischen Photonen in derselben Mode befinden; man spricht dann von *entarteter parametrischer Verstärkung*. In ([13], III) wird gezeigt, daß sich der nichtentartete Fall auf den entarteten zurückführen läßt – allerdings auf Kosten einer Verdopplung der Zahl der zu betrachtenden Moden.

Im folgenden wird der einfachste Fall betrachtet und nur die Resonator-Mode mit der Frequenz ω_0 berücksichtigt. Dazu muß insbesondere sichergestellt sein, daß die den Hohlraum begrenzenden Spiegel bei der Pumpfrequenz $2\omega_0$ eine sehr *hohe* Durchlässigkeit haben, so daß bei dieser Frequenz praktisch keine Resonanz mehr auftritt. Andernfalls könnte das Vorhandensein der Pumpmode im Resonator nicht vernachlässigt werden.

Der Modell-Hamilton-Operator für die parametrische Verstärkung ist also

$$\mathbb{H}_{PDC} = \frac{i\hbar}{2} (\epsilon_p(a^\dagger)^2 - \bar{\epsilon}_p a^2).$$

Dabei beschreibt $\epsilon_p(t) = \chi^{(2)}E(t)$ die effektive Stärke der nichtlinearen Wechselwirkung.

Der vollständige Hamilton-Operator des (abgeschlossenen) parametrischen Resonators ist somit $\mathbb{H}_S := \hbar\omega_0 a^\dagger a + \mathbb{H}_{PDC}$.

Die Kopplung eines *offenen* parametrischen Resonators an die Umgebung wird durch dieselben Hamilton-Operatoren $\mathbb{H}_K, \mathbb{H}_B$ wie in Abschnitt 1.1 beschrieben. Insbesondere ist \mathbb{H} wieder auf die in Abschnitt 1.1, S.9 beschriebene Weise „renormiert“.

Zum besseren Vergleich mit der Literatur wird ein zweites Bad berücksichtigt. $b(k, \omega)$ bezeichnet den Vernichter einer Mode der Frequenz ω im k ten Bad ($k = 1, 2$), die Transmissionskoeffizienten der beiden Spiegel sind γ_k . Der Gesamthamiltonian \mathbb{H} ergibt sich als

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \mathbb{H}_S + \mathbb{H}_B + \mathbb{H}_K \\ &= \hbar\omega_0 a^\dagger a + \frac{i\hbar}{2} (\epsilon_p(a^\dagger)^2 - \bar{\epsilon}_p a^2) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \hbar\omega b^\dagger(k, \omega) b(k, \omega) d\omega \\ &\quad - i\hbar \sum_{k=1}^2 \gamma_k \int_{\mathbb{R}} (b(k, \omega) a^\dagger - a b^\dagger(k, \omega)) d\omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

⁵Ein Ansatz zu einer operatoralgebraischen Begründung dieser Näherung findet sich in [12], S.75.

Es zeigt sich (in Abschnitt 2.3), daß \mathbb{H} die Zweitquantisierung eines dicht definierten selbstadjungierten Operators $(H, \mathcal{D}(H))$ auf $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ ist. Ein dichter Definitionsbereich von \mathbb{H} ist damit $\mathcal{F}_+(\mathcal{D}(H)) := \{(x_0, x_1, x_2, \dots) : x_i \in \odot_{k=1}^i \mathcal{D}(H) \text{ und } x_i \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i\}$. $\mathcal{D}(H)$ stimmt mit dem Definitionsbereich des Hamilton-Operators $H^{(2)}$ des zweiseitigen Hohlraums aus Abschnitt 1.4, S. 42f überein.

Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $a(t), b_t(\omega)$ lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t) &= -i\omega_0 a(t) + \epsilon(t)a^\dagger(t) - i[\mathbb{H}_K, a(t)], \\ \frac{d}{dt}b_t(\omega) &= -i\omega b_t(\omega) - i[\mathbb{H}_K, b_t(\omega)]. \end{aligned}$$

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 1.1 können aus diesen Bewegungsgleichungen Langevin-Gleichungen für den Systemoperator $a(t)$ und eine Randbedingung abgeleitet werden, die (wie Gl. (1.4)) Input- und Output-Felder in Beziehung setzt. Es ist für $t > t_0$

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) + \epsilon_p(t)a^\dagger(t) - \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)a(t) - \sum_k \sqrt{\gamma_k} b_{in}(k, t) \quad (2.4)$$

und für $t < t_1$

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) + \epsilon_p(t)a^\dagger(t) + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)a(t) - \sum_k \sqrt{\gamma_k} b_{out}(k, t). \quad (2.5)$$

Die Input-Operatoren sind wie in Abschnitt 1.1 durch die Anfangsbedingung im Bad, Vernichterdichte $b_0(k, \omega)$ zur Zeit t_0 definiert: $b_{in}(k, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t-t_0)} b_0(k, \omega) d\omega$ und die Output-Operatoren entsprechend durch $b_1(k, \omega)$ zur Zeit $t_1 > t_0$.

Unter der Annahme, daß die Operatoren b_{in} und b_{out} durch Heisenberg-Zeitentwicklung auseinander hervorgehen, läßt sich für $t \in [t_0, t_1]$ wieder eine Input-Output-Beziehung herleiten:

$$\sum_k \gamma_k a(t) = \sum_k \sqrt{\gamma_k} (b_{out}(k, t) - b_{in}(k, t)). \quad (2.6)$$

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Input-Output-Beziehung sogar für jede Badkomponente separat gilt, d.h. Gl. (2.6) gilt $\forall k$ auch ohne die Summenzeichen.

Für focknormale Zustände des elektromagnetischen Feldes läßt sich dann das Squeezing, das durch die Wechselwirkung mit dem nichtlinearen Medium

erreicht wird, berechnen. Dazu werden statt der Operatoren $a(t)$, $b_{in}(k, t)$, $b_{out}(k, t)$ ihre Fouriertransformierten $a(\omega) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i\omega t} a(t) dt$ etc. betrachtet. Man erhält unter Verwendung von (2.4, 2.6) und nach „Übergang in ein mit der Frequenz ω_0 rotierendes Koordinatensystem“⁶ eine Beziehung zwischen $b_{out}(1, \omega)$ und den Input-Operatoren in beiden Bädern (vgl. [1], Gl. 10.2.21⁷).

$$b_{out}(1, \omega) = -\frac{1}{\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + i\omega\right)^2 - |\epsilon|^2} \left\{ \left(\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_2}{2} + i\omega\right)^2 + |\epsilon|^2 \right) b_{in}(1, \omega) \right. \\ \left. + \epsilon \gamma_1 b_{in}^\dagger(1, -\omega) + \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + i\omega \right) b_{in}(2, \omega) + \epsilon \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} b_{in}^\dagger(2, -\omega) \right\}. \quad (2.7)$$

Mittels dieser Beziehung können die Korrelationsfunktionen des Output-Felds durch die des Input-Felds ausgedrückt werden. Insbesondere ist man an den Korrelationen interessiert, die die Varianz der Feldoperatoren „zur Testfunktion der Frequenz ω “ beschreiben. Die Varianz der Feldoperatoren $\Phi(e^{-i\omega x})$ wird auch als *squeezing spectrum* bezeichnet. Da der quasifreie Formalismus (vgl. die nächsten Abschnitte) eine allgemeinere und wesentlich übersichtlichere Berechnung derartiger Größen ermöglicht, wird hier auf Rechnungen verzichtet.

2.3 Die symplektische Einteilchen–Zeitentwicklung

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Dynamik auf dem Testfunktionenraum anzugeben, deren Zweitquantisierung das im vorigen Abschnitt skizzierte System beschreibt. Dazu ist zunächst der Hamiltonian zu bestimmen.

2.3.1 Der Einteilchen–Hamilton-Operator

Der Einteilchen-Hilbertraum des beidseitig offenen parametrischen Resonators ist $\mathcal{H} := \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$. Der Vergleich der Heisenberg-Bewegungsgleichung für den Fockraum-Operator $a(t)$ und der Einteilchen-Schrödinger-Zeitentwicklung für z_t (Gln. 1.2 und 1.13) zeigt, daß beide derselben Differentialgleichung genügen. Das legt folgenden Ansatz für den Einteilchen–

⁶Dieser wird durch die auf S.18 beschriebene unitäre Transformation vollzogen. D.h. es werden mit $e^{i\omega t}$ multiplizierte Vernichter verwendet (und mit $e^{-i\omega t}$ multiplizierte Erzeuger) und die im folgenden auftretenden Frequenzen sind relativ zum neuen Frequenznullpunkt ω_0 angegeben.

⁷Da Gardiner die Inverse der hier verwendeten Fouriertransformation benutzt, müssen alle dort vorkommenden Frequenzen mit -1 multipliziert werden.

Hamilton-Operator des parametrischen Resonators nahe

$$H : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \omega_0 z + i\epsilon_p \bar{z} + \sqrt{\gamma_1} f^{(1)}(0) + \sqrt{\gamma_2} f^{(2)}(0) \\ \sqrt{\gamma_1} z \delta_0 - i \frac{d}{dx} f^{(1)} \\ \sqrt{\gamma_2} z \delta_0 - i \frac{d}{dx} f^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

der wieder zu einer solchen Entsprechung von $a(t)$ und z_t (sowie von $a^\dagger(t)$ und \bar{z}_t) führt.⁸ Die Punktauswertung ist wieder symmetrisch vorzunehmen.

Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(H)$ von H ist derselbe, wie der von $H^{(2)}$, dem Einteilchen-Hamiltonian des an zwei Bäder gekoppelten, leeren Hohlraumresonators, denn der antilineare Summand, um den sich H von $H^{(2)}$ unterscheidet, ist beschränkt. Es ist also, vgl. S. 42,

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : f^{(k)}|_{\mathbb{R}^\pm} \in W^1(\mathbb{R}^\pm) \text{ und } f^{(k)}(0^+) - f^{(k)}(0^-) = -i\sqrt{\gamma_k} z, k = 1, 2 \right\}.$$

Mit „ $f^{(k)} \in \mathcal{D}(H)$ “ seien im folgenden Paare von $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen bezeichnet, für die es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, so daß $\begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(H)$. Zu gegebenem $f^{(k)}$ gibt es höchstens ein solches z .

$H = H_s + H_a$ ist nicht mehr komplex-, sondern nur noch reell-linear. Sowohl H_s als auch H_a sind selbstadjungiert⁹ und nach ([13], I, siehe auch Satz A.1 im Anhang A) generiert H damit eine symplektische (und nicht mehr unitäre) Zeitentwicklung auf \mathcal{H} .

Daher ist es jetzt nicht mehr möglich, auf die Ergebnisse über unitäre Dilatationen zurückzugreifen und den richtigen Ansatz für die Zeitentwicklung von dort zu übernehmen. Stattdessen wird die von H generierte Zeitentwicklung (die wieder mit U_t bezeichnet wird) durch Lösen der Schrödingergleichung bestimmt.

Die Notation sei im folgenden wie in Abschnitt 1.4: Ein Element $\mathcal{H} \ni (z, f^{(1)}, f^{(2)})$ wird kurz mit $(z, f^{(k)})$ bezeichnet und die Summe der Kopplungskonstanten γ_k mit $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$.

⁸Da die Dynamik des (nicht-offenen) parametrischen Resonators auf dem Fockraum durch den unitären Squeeze-Operator $S(\epsilon)$ beschrieben wird ($U_t = S(\epsilon t)$, vgl. [12], S.76), liegt auch der Ansatz „ H_s ist Generator der symplektischen Gruppe $Q(\epsilon t)$ auf \mathbb{C} “ nahe, der zu demselben Resultat führt.

⁹Die Adjungierte R^\dagger eines anti-linearen Operators R auf einem komplexen Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist (z.B. in [13], II) definiert durch $\langle f, R^\dagger g \rangle := \langle g, R f \rangle$.

Die Schrödingergleichung

Wie in Kapitel 1 führt die Schrödingergleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix} = -iH \begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

mit zwei Anfangsbedingungen $f_{t=t_0}^{(k)} = f_0^{(k)}$ und $f_{t=t_1}^{(k)} = f_1^{(k)}$ aus $\mathcal{D}(H)$ zu zwei Langevin-Gleichungen für z_t mit $t > t_0$

$$\frac{d}{dt} z_t = \left(-i\omega_0 - \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k \right) z_t + \epsilon_p(t) \bar{z}_t - i \sum_k \sqrt{\gamma_k} f_{t_0}^{(k)} (t_0 - t) \quad (2.10)$$

und und $z_{t < t_1}$

$$\frac{d}{dt} z_t = \left(-i\omega_0 + \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k \right) z_t + \epsilon_p(t) \bar{z}_t - i \sum_k \sqrt{\gamma_k} f_{t_1}^{(k)} (t_1 - t). \quad (2.11)$$

Die Badkomponenten der Lösung von Gl. (2.9) lassen sich dann durch z_t ausdrücken:

$$f_t^{(k)}(x) = \left(S_{t-t_0} f_{t_0}^{(k)} \right) (x) - i\sqrt{\gamma_k} z_{t-x} \chi_{[0, t-t_0]}(x) \quad (t > t_0)$$

und

$$f_t^{(k)}(x) = \left(S_{t-t_1} f_{t_1}^{(k)} \right) (x) + i\sqrt{\gamma_k} z_{t-x} \chi_{[t-t_1, 0]}(x) \quad (t < t_1).$$

Damit die Gleichungen (2.10,2.11) simultan lösbar (d.h. Anfangs- und Endbedingung konsistent) sind, ist zu fordern, daß $U_{t_1-t_0} \begin{pmatrix} z_0 \\ f_0^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix}$. Für die Input- und Output-Funktionen $f_0^{(k)}, f_1^{(k)}$ heißt das, daß sie die Randbedingungen

$$\gamma_k z_t = i\sqrt{\gamma_k} \left(f_1^{(k)}(t_1 - t) - f_0^{(k)}(t_0 - t) \right) \quad k = 1, 2 \quad (2.12)$$

erfüllen müssen.

Um die Gln. (2.10,2.11) zu lösen, ist es günstig, ein „rotierendes Koordinatensystem“ zu wählen. Dies wird (wie in Abschnitt 1.2, S.18) dadurch erreicht, daß zur Zeit t statt der Testfunktion $(z_t, f_t^{(1)}, f_t^{(2)}) \in \mathcal{H}$ die durch $V_t = e^{i\omega_0 t} \oplus M_{e^{i\omega_0(t-x)}} \oplus M_{e^{i\omega_0(t-x)}}$ unitär transformierte Testfunktion $V_t \begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix}$ betrachtet, d.h. der Nullpunkt der Frequenzskala um ω_0 nach rechts verschoben wird.

Der Hamiltonian vereinfacht sich dadurch in zweifacher Hinsicht: zum einen wird der komplex-lineare Anteil des System-Hamiltonians ($z \mapsto \omega_0 z$)

wegtransformiert, zum anderen die Zeitabhängigkeit des antilinearen Teils von H_s . Ebenso kann eine eventuell vorhanden Phase $e^{i\phi}$ des Pumpstrahls durch $V_t(\phi) := e^{i\phi/2}V_t$ wegtransformiert werden. Daher kann im folgenden oBdA ϵ konstant und positiv gewählt werden. Gl. (2.10) lautet dann

$$\frac{d}{dt}z_t = -\frac{1}{2}\sum_k \gamma_k z_t + \epsilon \bar{z}_t - i \sum_k \sqrt{\gamma_k} f_{t_0}^{(k)}(t_0 - t).$$

Mit dieser Wahl von ϵ führt der antilineare Summand in den Gln. (2.10, 2.11) zu einer exponentiellen Dämpfung des Imaginärteils von z (und einer exponentiellen Verstärkung von $\text{Re}z$)¹⁰. Diesem Verhalten überlagert ist die Dämpfung von $\text{Im}z$ und $\text{Re}z$ durch die Abstrahlung in die Umgebung (und ggf. der antreibende Einfluß der Umgebungserregung).

2.3.2 Die Lösung der Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung 2.9 wird für positive Zeiten $t > 0$ gelöst durch

$$z_t = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (\cosh(\epsilon t)z_0 + \sinh(\epsilon t)\bar{z}_0) \quad (2.13)$$

$$-ie^{-\frac{\gamma}{2}t} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s} \left(\cosh(\epsilon(t-s))f_0^{(l)}(-s) - \sinh(\epsilon(t-s))\overline{f_0^{(l)}(-s)} \right) ds,$$

$$f_t^{(k)}(x) = -i\sqrt{\gamma_k}e^{\frac{\gamma}{2}(x-t)} (\cosh(\epsilon(x-t))z_0 - \sinh(\epsilon(x-t))\bar{z}_0) \chi_{[0,t]}(x) \quad (2.14)$$

$$+ \left(S_t f_0^{(k)} \right) (x) - \sqrt{\gamma_k}e^{\frac{\gamma}{2}(x-t)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^{t-x} e^{\frac{\gamma}{2}s} \left(\cosh(\epsilon(t-x-s))f_0^{(l)}(-s) - \sinh(\epsilon(t-x-s))\overline{f_0^{(l)}(-s)} \right) ds \chi_{[0,t]}(x)$$

und für $t < 0$ durch

$$z_t = e^{\frac{\gamma}{2}t} (\cosh(\epsilon t)z_0 + \sinh(\epsilon t)\bar{z}_0) \quad (2.15)$$

$$+ ie^{\frac{\gamma}{2}t} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_t^0 e^{-\frac{\gamma}{2}s} \left(\cosh(\epsilon(t-s))f_0^{(l)}(-s) - \sinh(\epsilon(t-s))\overline{f_0^{(l)}(-s)} \right) ds,$$

$$f_t^{(k)}(x) = i\sqrt{\gamma_k}e^{-\frac{\gamma}{2}(x-t)} (\cosh(\epsilon(t-x))z_0 + \sinh(\epsilon(t-x))\bar{z}_0) \chi_{[t,0]}(x) \quad (2.16)$$

$$+ \left(S_t f_0^{(k)} \right) (x) - \sqrt{\gamma_k}e^{-\frac{\gamma}{2}(x-t)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_{t-x}^0 e^{-\frac{\gamma}{2}s} \left(\cosh(\epsilon(t-x-s))f_0^{(l)}(-s) - \sinh(\epsilon(t-x-s))\overline{f_0^{(l)}(-s)} \right) ds \chi_{[t,0]}(x).$$

¹⁰Eine Phase $e^{i\phi}$ des Pumpstrahls hätte zur Folge, daß statt $\text{Re}z$, $\text{Im}z$ Real- bzw. Imaginärteil von $e^{-i\phi/2}z$ verstärkt bzw. gedämpft würden.

Satz 2.3.1 (Zeitentwicklung des parametrischen Verstärkers)

Sei $\begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix}$ wie in den Gln. (2.13ff). Dann ist die durch

$$U_t: \begin{pmatrix} z_0 \\ f_0^{(k)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix}$$

definierte Zeitentwicklung eine stark stetige Gruppe symplektischer Transformationen auf $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$.

Beweis: Nach Satz 2.10 aus ([13], I, vgl. Satz A.1) ist U_t eine stark stetige Gruppe symplektischer Transformationen, da sie von dem Hamiltonian 2.3, einem (reell-linearen) Operator der Form $iH_l + H_a$ mit $H_l = H_l^\dagger$ und beschränktem $H_a = H_a^\dagger$ generiert wird.

Bevor die Dynamik U_t genauer untersucht wird, sollen noch einige andere Schreibweisen von $(z_t, f_t^{(k)})$ angegeben werden, die bei der einen oder anderen Rechnung nützlich sind.

Zeitentwicklung als Faltung

Mit den reellwertigen $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen

$$\begin{aligned} G_\pm(u) &:= e^{\pm \frac{\gamma}{2}u} \cosh(\epsilon u) \chi_{\mathbb{R}^\mp}(u), \\ F_\pm(u) &:= e^{\pm \frac{\gamma}{2}u} \sinh(\epsilon u) \chi_{\mathbb{R}^\mp}(u) \end{aligned} \quad (2.17)$$

und der Faltung $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u) du$ gilt für $t > 0$

$$\begin{aligned} z_t &= (G_+(-t)z_0 - F_+(-t)\bar{z}_0) - \\ &\quad - i \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left((G_+ * f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(-t) - (F_+ * \overline{f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-}})(-t) \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} f_t^{(k)}(x) &= S_t \left[f_0^{(k)}(x) - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_+ * f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(x) + (F_+ * \overline{f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-}})(x) \right] \chi_{[-t,0]}(x) \right. \\ &\quad \left. - i \sqrt{\gamma_k} (G_+(x)z_0 - F_+(x)\bar{z}_0) \chi_{[-t,0]}(x) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

bzw. für $t < 0$

$$\begin{aligned} z_t &= (G_-(-t)z_0 - F_-(-t)\bar{z}_0) + \\ &\quad + i \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(-t) + (F_- * \overline{f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+}})(-t) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$f_t^{(k)}(x) = S_t \left[f_0^{(k)}(x) - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(x) + (F_- * \overline{f_0^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+}})(x) \right] \chi_{[0,-t]}(x) \right]$$

$$\left. + i\sqrt{\gamma_k}(G_-(x)z_0 - F_-(x)\bar{z}_0)\chi_{[0,-t]}(x) \right]. \quad (2.21)$$

Diese Form ist z.B. bei der Berechnung der Wellenoperatoren und beim Übergang ins Fourierbild hilfreich.

Zeitentwicklung mit dem Squeeze-Operator

Die Gleichungen werden übersichtlicher, wenn man sie mit dem aus Gl. (2.1), PrefSqOp bekannten Squeeze-Operator $Q(\epsilon) : z \mapsto \cosh |\epsilon| z - \arg(\epsilon) \sinh |\epsilon| \bar{z}$ schreibt. Für positive Zeiten $t > 0$ gilt

$$z_t = e^{-\frac{\gamma}{2}t}Q(-\epsilon t)z_0 - ie^{-\frac{\gamma}{2}t} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2}s}Q(\epsilon(t-s))f^{(l)}(-s) ds, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} f_t^{(k)}(x) &= -i\sqrt{\gamma_k}e^{\frac{\gamma}{2}(x-t)}Q(\epsilon(x-t))z_0\chi_{[0,t]}(x) \\ &+ \left(S_t f_0^{(k)}\right)(x) - \sqrt{\gamma_k}e^{\frac{\gamma}{2}(x-t)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^{t-x} e^{\frac{\gamma}{2}s}Q(\epsilon(t-x-s))f_0^{(l)}(-s) ds \chi_{[0,t]}(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

und für $t < 0$

$$z_t = e^{\frac{\gamma}{2}t}Q(-\epsilon t)z_0 + ie^{\frac{\gamma}{2}t} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_t^0 e^{-\frac{\gamma}{2}s}Q(\epsilon(t-s))f_0^{(l)}(-s) ds, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} f_t^{(k)}(x) &= i\sqrt{\gamma_k}e^{-\frac{\gamma}{2}(x-t)}Q(\epsilon(x-t))z_0\chi_{[t,0]}(x) \\ &+ \left(S_t f_0^{(k)}\right)(x) - \sqrt{\gamma_k}e^{-\frac{\gamma}{2}(x-t)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_{t-x}^0 e^{-\frac{\gamma}{2}s}Q(\epsilon(t-x-s))f_0^{(l)}(-s) ds \chi_{[t,0]}(x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Setzt man $f^{(k)} = 0$ so sieht man, daß die Zeitentwicklung von z_t für für $t > 0$ durch die reell-lineare Halbgruppe

$$T_t := e^{-\frac{\gamma}{2}t}Q(-\epsilon t)$$

beschrieben wird (und für $t < 0$ durch $T_t = e^{\frac{\gamma}{2}t}Q(-\epsilon t)$).

Benutzt man, daß $iQ(\epsilon)z = Q(-\epsilon)(iz) \forall z$, so läßt sich die Zeitentwicklung noch kompakter schreiben:

$$z_t = T_t z_0 + \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t T_s(-if_0^{(l)}(s-t))ds, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} f_t^{(k)}(x) &= \frac{1}{-i} \left(-\sqrt{\gamma_k} T_{t-x} z_0 \chi_{[0,t]}(x) + S_t(-if_0^{(k)})(x) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\gamma_k} \chi_{[0,t]}(x) \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^{t-x} T_s(-if_0^{(l)}(s-t+x))ds \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sieht man von dem unwesentlichen Phasenfaktor im Bad ab, so hat die Zeitentwicklung U_t dieselbe Form wie die in [4], II, S.18 angegebene Kopplungsdarstellung der minimalen unitären Dilatation einer selbstadjungierten Halbgruppe T_t — mit dem Unterschied, daß T_t hier eine nur reell-lineare Halbgruppe ist, und U_t entsprechend keine unitäre, sondern nur eine symplektische Gruppe. Man könnte U_t daher als die *symplektische Dilatation* der Halbgruppe T_t bezeichnen.

Es gilt für alle t auch wieder eine Gl. (1.9) entsprechende Beziehung

$$U_t \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} = U_t \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ S_t f^{(k)} \end{pmatrix} + \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t U_s \begin{pmatrix} -i f^{(l)}(s-t) \\ 0 \end{pmatrix} ds, \quad (2.28)$$

die zur Ableitung einer Input-Output-Relation von Nutzen ist.

Zeitentwicklung von Real- und Imaginärteil

Der reell-linearen Struktur von U_t wird man am besten gerecht, wenn man Real- und Imaginärteil der Testfunktionen getrennt betrachtet. Sei $z_t = u_t + iy_t$ und $f_t^{(k)}(x) = v_t^{(k)}(x) + iw_t^{(k)}(x)$, dann gilt für $t > 0$

$$u_t = e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)t} u_0 + \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(t-s)} w_0^{(l)}(-s) ds, \quad (2.29)$$

$$y_t = e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)t} y_0 - \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(t-s)} v_0^{(l)}(-s) ds, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} v_t^{(k)}(x) &= \sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(x-t)} \chi_{[0,t]}(x) y_0 + \left(S_t v_0^{(k)} \right) (x) \\ &\quad - \sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(x-t)} \chi_{[0,t]}(x) \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^{t-x} e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)s} v_0^{(l)}(-s) ds, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} w_t^{(k)}(x) &= -\sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(x-t)} \chi_{[0,t]}(x) u_0 + \left(S_t w_0^{(k)} \right) (x) \\ &\quad - \sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(x-t)} \chi_{[0,t]}(x) \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^{t-x} e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)s} w_0^{(l)}(-s) ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

und für $t < 0$

$$u_t = e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)t} u_0 - \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_t^0 e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(t-s)} w_0^{(l)}(-s) ds, \quad (2.33)$$

$$y_t = e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)t} y_0 + \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_t^0 e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(t-s)} v_0^{(l)}(-s) ds, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
 v_t^{(k)}(x) &= -\sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(t-x)} \chi_{[t,0]}(x) y_0 + \left(S_t v_0^{(k)} \right) (x) \\
 &\quad - \sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(t-x)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_{t-x}^0 e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)s} v_0^{(l)}(-s) ds \chi_{[t,0]}(x),
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 w_t^{(k)}(x) &= \sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(t-x)} \chi_{[t,0]}(x) u_0 + \left(S_t w_0^{(k)} \right) (x) \\
 &\quad - \sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(t-x)} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_{t-x}^0 e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)s} w_0^{(l)}(-s) ds \chi_{[t,0]}(x).
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Offenbar steht der Realteil von z nur mit dem Imaginärteil der $f^{(k)}$ in Wechselwirkung (und der Imaginärteil von z nur mit dem Realteil der $f^{(k)}$). \mathcal{H} zerfällt in zwei reelle Teilräume

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_+ &:= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : iz \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R} \forall x \right\}, \\
 \mathcal{H}_- &:= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : z \in \mathbb{R}, if(x) \in \mathbb{R} \forall x \right\},
 \end{aligned}$$

die von U_t invariant gelassen werden und bezüglich des reellen Skalarprodukts $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonal zueinander sind. Die beiden Räume unterscheiden sich dadurch, daß die parametrische Wechselwirkung auf \mathcal{H}_+ dämpfend und auf \mathcal{H}_- verstärkend wirkt. Für $\gamma \leq 2\epsilon$ und $t \rightarrow \pm\infty$ verhält sich U_t nur noch auf einem der beiden Räume asymptotisch frei (vgl. Abschnitt 2.4, Satz 2.4.2).

U_t im Frequenzbild

Da in der Quantenoptik häufig in einer Testmode mit scharfer Frequenz gearbeitet wird, ist zum Vergleich mit der Literatur die fouriertransformierte Zeitentwicklung nützlich:

$$\begin{aligned}
 z_t &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} Q(\epsilon t) z_0 - \\
 &\quad - i \sum_k \sqrt{\gamma_k} \int_0^t \left(e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(t-s)} \text{FT}[\widehat{\text{Re}f_0^{(k)}}](s) + e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(t-s)} \text{FT}[i\widehat{\text{Im}f_0^{(k)}}](s) \right) ds,
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}_t^{(k)}(\omega) &= e^{-i\omega t} \widehat{f}_0^{(k)}(\omega) \\
 &\quad + i \sqrt{\frac{\gamma_k}{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t} - e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)t}}{i\omega - (\frac{\gamma}{2} - \epsilon)} \text{Re}z_0 + \frac{e^{-i\omega t} - e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)t}}{i\omega - (\frac{\gamma}{2} + \epsilon)} i\text{Im}z_0 \right] \\
 &\quad + \sqrt{\frac{\gamma_k}{2\pi}} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t \left[\frac{e^{-i\omega(t-s)} - e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)(t-s)}}{i\omega - (\frac{\gamma}{2} + \epsilon)} \text{FT}[\widehat{\text{Re}f_0^{(l)}}](s) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-i\omega(t-s)} - e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)(t-s)}}{i\omega - (\frac{\gamma}{2} - \epsilon)} \text{FT}[i\widehat{\text{Im}f_0^{(l)}}](s) \right] ds
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Diskussion

Die im vorigen Kapitel betrachtete Zeitentwicklung des (leeren) Hohlraumresonators ist ein Spezialfall der nun vorliegenden: Mit $\epsilon = 0$ erhält man $U_t^{(2)}$ aus Abschnitt 1.4 und dann mit $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = 0$ die Ausdrücke aus Abschnitt 1.2.

Der in Abschnitt 1.4, Gl. (1.38) definierte Teilraum $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : f^{(2)} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} f^{(1)} \right\}$ und sein orthogonales Komplement \mathcal{K}^\perp sind, wie man leicht nachrechnet, auch unter dem symplektischen U_t invariant und es gilt wieder: $U_t|_{\mathcal{K}^\perp} = 1 \oplus S_t \oplus S_t$. Die eigentliche Wechselwirkung findet also nur in \mathcal{K} statt.

Für $\epsilon \neq 0$ gibt es im Hohlraum zwei durch eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ unterschiedene „Moden“, von denen eine durch die Wechselwirkung mit der Nichtlinearität des Mediums exponentiell verstärkt und die andere exponentiell gedämpft wird.

Wie aus der Diskussion des Squeeze-Operators (2.1) hervorgeht, reduziert eine solche Zeitentwicklung die Schwankung des zu $i\text{Im}z$ gehörenden Feldoperators zunehmend und vergrößert die des kanonisch konjugierten (zu $\text{Re}z$ gehörenden) Feldoperators.

Der Fall $\gamma = 2\epsilon$ wird als *Oszillationsschwelle* bezeichnet. An diesem Punkt ändert sich das Verhalten des parametrischen Resonators deutlich:

Unterhalb der Oszillationsschwelle ($\epsilon < \frac{\gamma}{2}$) ist die Verstärkung durch die nichtlineare Wechselwirkung so schwach, daß die Dissipationsverluste des Resonators durch die Umwandlung von Pumpphotonen nicht kompensiert werden: Die Anregung im Hohlraum verschwindet für $t \rightarrow \infty$. Für die Verwendung des OPR als Verstärker ist dieses Verhalten erwünscht, da es sicherstellt, daß nur ein Eingangssignal und nicht evt. im Resonator vorhandene Anregungen verstärkt werden: unterhalb der Oszillationsschwelle ist keine Selbsterregung des OPR möglich.

Wird die Intensität des Pumpstrahls erhöht (oder die Durchlässigkeit der den Hohlraum begrenzenden Spiegel vermindert) bis $\epsilon > \frac{\gamma}{2}$ ist, so übersteigt die parametrische Verstärkung die Verluste und die Anregung im Resonator wächst immer stärker an ($|z_t|$ divergiert für $t \rightarrow \infty$). Das sogar qualitativ andere Verhalten des OPR *above threshold* wird auch dadurch deutlich, daß die Zeitentwicklung U_t für $\epsilon > \frac{\gamma}{2}$ auch ein Punktspektrum aufweist:

Lemma 2.3.1 (Eigenvektor der symplektischen Zeitentwicklung)

Sei $\epsilon > \frac{\gamma}{2}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\gamma_k} e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)x} \chi_{\mathbb{R}^+}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_-$$

Eigenvektor von U_t zum Eigenwert $e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)t}$.

Ebenso ist $(-\sqrt{\gamma_k}e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)x}\chi_{\mathbb{R}^-(x)}) \in \mathcal{H}_+$ Eigenvektor von U_t zum Eigenwert $e^{(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)t}$.

Beweis: Nachrechnen. ■

Die Eigenzustände einer Zeitentwicklung sind die gebundenen Zustände des Systems. Das Auftreten von gebundenen Zuständen zeigt, daß der parametrische Resonator oberhalb der Oszillationsschwelle nicht mehr asymptotisch vollständig ist: nicht jeder Zustand verhält sich asymptotisch frei.

Es ist jedoch zu beachten, daß die parametrische Näherung mit zunehmender Anregung der ω_0 -Mode immer schlechter wird: Denn in dieser Näherung wird die (aufgrund der Konversion von Pumpphotonen in Signalphotonen auftretende) Abnahme der Pumpintensität (pump depletion) vernachlässigt. Mandel und Wolf geben (in [11], S. 1075) als Gültigkeitsbereich der Näherung an, daß der Erwartungswert des Teilchenzahloperators zur Mode der Frequenz ω_0 viel kleiner sei als die Intensität des Pumpstrahls: $\langle N(\omega_0) \rangle \ll |E|^2$ (wobei E die Amplitude des Pumpstrahls ist).

Input-Output-Beziehungen

Weder die Herleitung von Gl. (1.15) noch die von Gl. (1.18) in Abschnitt 1.2 hing von der Unitarität der Zeitentwicklung (oder der \mathbb{C} -Linearität der dilatierten Halbgruppe) ab. Beide gelten daher auch für die Zeitentwicklung des parametrischen Resonators. So erhält man unter Verwendung von Gl. (2.28) die zu Gl. (1.18) analoge Beziehung

$$U_{t_1}U_{-t_1}^{(0)}U_t^{(0)}\begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} \end{pmatrix} - U_{t_0}U_{-t_0}^{(0)}U_t^{(0)}\begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_{t_0}^{t_1} U_s \begin{pmatrix} -if^{(l)}(s-t) \\ 0 \end{pmatrix} ds. \quad (2.39)$$

2.4 Streutheorie der symplektischen Zeitentwicklung

Gegenstand dieses Abschnitts ist das asymptotische Verhalten von Testfunktionen $\begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix}$ unter der Zeitentwicklung U_t für $t \rightarrow \pm\infty$. Vieles ist analog zum Abschnitt 1.3.1, an einigen Stellen ist aber etwas mehr Aufwand und Vorsicht nötig als dort.

Verantwortlich dafür sind folgende Unterschiede zur Zeitentwicklung aus Kapitel 1:

- (1) U_t ist nicht mehr unitär, daher sind die Voraussetzungen der Lax-Phillips-Streutheorie nicht mehr erfüllt.
- (2) Es gilt nicht mehr, daß $\|U_t\| = 1 = \text{const}$, aber für alle $\epsilon < \frac{\gamma}{2}$ gibt es wenigstens $c > 0$, so daß $\|U_t\| < c \forall t$.
- (3) Da U_t nicht mehr die minimale unitäre Dilatation einer Halbgruppe ist, ist auch nicht sofort klar, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zyklisch ist.
- (4) Da U_t nur noch reell-linear ist, scheint es mir angemessen, die Definitionen von ein- und auslaufenden Teilräumen und Zyklizität so zu modifizieren, daß nur reelle Linearkombinationen zugelassen sind.
- (5) Oberhalb der Oszillationsschwelle besitzt U_t auch ein Punktspektrum.

2.4.1 Präliminarien

Zur Bestimmung der Wellenoperatoren wird U_t mit der freien Zeitentwicklung $U_t^{(0)} := 1 \oplus S_t \oplus S_t$ verglichen.

Der Einteilchenraum $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ der Umgebung wird mit \mathcal{H}_0 bezeichnet. Wie weiter oben schon erwähnt, findet die eigentliche Wechselwirkung in dem unter U_t invarianten Teilraum \mathcal{K} statt. Auf \mathcal{K}^\perp ist $U_t = U_t^{(0)}$.

Die Asymptotik von U_t weist auf den reellen Teilräumen $\mathcal{H}_{+/-}$ (vgl. Gl. (2.3.2), S. 61) u.U. große Unterschiede auf, daher werden diese oft separat betrachtet.

Lemma 2.4.1 (Zyklischer Vektor von U_t)

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist reell-zyklisch in $\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{K}$, d.h. $M := \text{LH}_{\mathbb{R}}\{U_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ liegt dicht in $\mathcal{H}_+ \cap \mathcal{K}$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ ist reell-zyklisch in $\mathcal{H}_- \cap \mathcal{K}$.

Beweis:

Es ist $U_{t>0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-i\sqrt{\gamma_k} e^{-(\frac{\gamma}{2}-\epsilon)t} \chi_{[0,t]}(x) \right)$ und $U_{t<0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(i\sqrt{\gamma_k} e^{-(\frac{\gamma}{2}+\epsilon)t} \chi_{[t,0]}(x) \right)$. Die Funktionen $\{e^{cx} \chi_{[0,t]} : t \in \mathbb{R}^+\}$ bzw. $\{e^{cx} \chi_{[t,0]} : t \in \mathbb{R}^-\}$ sind für alle $c \neq 0$ reell-total in $L^2(\mathbb{R}^+)_{\mathbb{R}}$ bzw. $L^2(\mathbb{R}^-)_{\mathbb{R}}$. Also ist M für alle $\gamma, \epsilon > 0$ dicht in $\{(z, f^{(1)}, f^{(2)}) : z \in \mathbb{C}, f^{(1)} \in L^2(\mathbb{R}), f^{(2)} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} f^{(1)}\} = \mathcal{K}$. ■

Bemerkung: Da die komplex-lineare Hülle von \mathcal{H}_+ oder \mathcal{H}_- allein schon ganz \mathcal{H} ist, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ jeweils (komplex-)zyklisch in \mathcal{K} .

Bei der Bestimmung der ein- und auslaufenden Teilräume von U_t ist es günstig, die dynamischen Systeme (U_t, \mathcal{H}_+) und (U_t, \mathcal{H}_-) getrennt zu betrachten, da sie sich oberhalb der Oszillationsschwelle qualitativ verschieden verhalten.

Naheliegende Kandidaten für die auslaufenden (einlaufenden) Teilräume sind (wie in Abschnitt 1.3.1) die Testfunktionen mit verschwindender Systemkomponente und halbseitig verschwindender Umgebungserregung:

Lemma 2.4.2 (Ein- und auslaufende Teilräume)

(a) Sei $\epsilon < \frac{\gamma}{2}$. Dann sind für alle $r \geq 0$

$$D_{\text{aus},+ / (-)}^r := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{+ / (-)} : \text{supp} f^{(k)} \subseteq [r, \infty) \right\}$$

auslaufende Teilräume von (U_t, \mathcal{H}_+) bzw. (U_t, \mathcal{H}_-) und

$$D_{\text{ein},+ / (-)}^r := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{+ / (-)} : \text{supp} f^{(k)} \subseteq (-\infty, -r] \right\}$$

sind einlaufende Teilräume von (U_t, \mathcal{H}_+) (bzw. (U_t, \mathcal{H}_-)).

(b) Falls $\epsilon \geq \frac{\gamma}{2}$ ist, gilt immer noch $\forall r \geq 0$: $D_{\text{aus},+}^r$ ist auslaufender Teilraum von (U_t, \mathcal{H}_+) und $D_{\text{ein},-}^r$ ist einlaufender Teilraum von (U_t, \mathcal{H}_-) .

Beweis: Unter Verwendung von Lemma 2.4.1 läßt sich der Beweis genauso wie der von Lemma 1.3.1 in Abschnitt 1.3.1, S. 30 führen. Er wird für $D_{\text{aus},-}^0$ vorgeführt, um zu demonstrieren, woran er oberhalb der Oszillationsschwelle scheitert.

Es sind die drei Eigenschaften aus Def. 1.3.2 nachzuprüfen. (1) und (2) sind offensichtlich, da $U_t|_{D_{\text{aus},-}^r} = 1 \oplus S_t \oplus S_t$ ist.

(3) Um zu zeigen, daß $M := \cup_t (U_t D_{\text{aus},-}^r)$ dicht in \mathcal{H}_- liegt, wird wieder versucht zu zeigen, daß der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Abschluß von M liegt. Dann folgt die Eigenschaft (3) aus der Zyklizität von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definiere für $\mathbb{R}^- \supset (t_n)_n \rightarrow -\infty$ die Folge $D_{\text{aus},-}^0 \supset (g_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} := P_{\text{Bad}}(U_{-t_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Sei $\begin{pmatrix} z_n \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix} := U_{t_n} \begin{pmatrix} 0 \\ g_n^{(k)} \end{pmatrix}$. Zu zeigen ist dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} z_n \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man rechnet sofort nach: $z_n = 1 - e^{\gamma t_n}$ und $f_n^{(k)} = -\sqrt{\gamma k} e^{\gamma t_n} e^{-(\frac{\gamma}{2} + \epsilon)x} \chi_{[t_n, 0]}(x)$. Dieser Ausdruck konvergiert für $t_n \rightarrow -\infty$ nur falls $\epsilon < \frac{\gamma}{2}$ gegen 0, anderenfalls existiert der Grenzwert nicht.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt also unterhalb der Oszillationsschwelle im Abschluß von $\cup_t U_t(D_{\text{aus},-}^r)$.

Im Teilraum \mathcal{H}_+ tritt für $t \rightarrow -\infty$ diese Schwierigkeit nicht auf, da dort nicht ϵ , sondern $-\epsilon$ im Exponenten steht. Daher konvergieren dort die $f_n^{(k)}$ für alle $\gamma, \epsilon > 0$ gegen 0 und $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt immer im Abschluß von M . $D_{\text{aus},+}^r$ ist für alle $\epsilon, \gamma > 0$ auslaufender Teilraum.

Werden einlaufende Teilräume betrachtet, geht der Beweis in \mathcal{H}_- für alle ϵ durch und in \mathcal{H}_+ nur unterhalb der Oszillationsschwelle. ■

Oberhalb der Oszillationsschwelle ist $D_{\text{aus},-}^r$ kein einlaufender Teilraum, denn es gilt

Lemma 2.4.3 (Urbilder auslaufender Wellen für $\gamma < 2\epsilon$ nicht dicht in \mathcal{H}_-)
 Der Teilraum

$$M := \text{LH}\left\{U_t \begin{pmatrix} 0 \\ ig \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_- : \text{supp } g \subseteq \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}\right\}$$

liegt nicht dicht in \mathcal{H}_- .

Beweis: Man rechnet direkt nach, daß der Vektor $\left(i_{\sqrt{\gamma}e^{(\epsilon-\frac{\gamma}{2})x}}\chi_{\mathbb{R}^-(x)}\right) \in \mathcal{H}_-$ senkrecht auf allen Elementen von M steht. ■

Bemerkung: Entsprechend zeigt man, daß $D_{\text{ein},+}^r$ kein einlaufender Teilraum von (U_t, \mathcal{H}_+) ist.

Daß es oberhalb der Oszillationsschwelle für (U_t, \mathcal{H}_-) keinen auslaufenden Teilraum gibt, ist nicht überraschend. Denn sei $\begin{pmatrix} z_t \\ f_t^{(k)} \end{pmatrix} = U_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann divergiert z_t . Das heißt, egal wie lange man wartet, die Anregung im System wird nie ganz in die Umgebung abgegeben. Das System ist eben *nicht* asymptotisch frei, und daher ist auch nicht zu erwarten, daß es asymptotisch durch die Elemente eines auslaufenden Teilraums beschrieben werden kann.

Die Existenz eines einlaufenden Teilraums zeigt andererseits, daß jede Testfunktion in \mathcal{H}_- in der fernen Vergangenheit frei ist.

Für \mathcal{H}_+ existiert oberhalb der Oszillationsschwelle ein auslaufender, aber kein einlaufender Teilraum.

2.4.2 Die symplektischen Wellenoperatoren

Die Wellenoperatoren $W_{\pm} := \text{stop-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t}^{(0)} U_t$ können nun wie in Satz 1.3.2 berechnet werden. Die Überlegungen des vorigen Unterabschnitts machen klar, daß dazu die Fälle $\epsilon < \frac{\gamma}{2}$ und $\epsilon \geq \frac{\gamma}{2}$ unterschieden werden müssen.

Satz 2.4.1 (Wellenoperatoren für den parametrischen Resonator unterhalb der Oszillationsschwelle)

Sei $\epsilon < \frac{\gamma}{2}$. Dann existieren die Wellenoperatoren

$$W_{\pm} := \text{stop-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t}^{(0)} U_t : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$$

und sind durch die symplektischen Transformationen

$$W_+ \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_+ * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(x) + (F_+ * \overline{f^{(l)}} \chi_{\mathbb{R}^-})(x) \right] \end{pmatrix}$$

$$-i\sqrt{\gamma_k}(G_+(x)z - F_+(x)\bar{z}), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} W_- \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} &= \left(f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(x) + (F_- * \overline{f^{(l)}} \chi_{\mathbb{R}^+})(x) \right] \right. \\ &\quad \left. + i\sqrt{\gamma_k}(G_-(x)z - F_-(x)\bar{z}) \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

gegeben. Ihre Inversen $\Omega_{\pm}: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ sind

$$\Omega_- (f^{(k)}) = \begin{pmatrix} -i \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_+ * f^{(l)})(0) + (F_+ * \overline{f^{(l)}})(0) \right] \\ f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_+ * f^{(l)})(x) + (F_+ * \overline{f^{(l)}})(x) \right] \chi_{\mathbb{R}^+}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\Omega_+ (f^{(k)}) = \begin{pmatrix} i \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f^{(l)})(0) + (F_- * \overline{f^{(l)}})(0) \right] \\ f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f^{(l)})(x) + (F_- * \overline{f^{(l)}})(x) \right] \chi_{\mathbb{R}^-}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Dabei sind G_{\pm} und F_{\pm} wie in Gl. (2.17) definiert: $G_{\pm}(x) = e^{\pm \frac{\gamma}{2}x} \cosh(\epsilon x) \chi_{\mathbb{R}^{\mp}}$ und $F_{\pm}(x) = e^{\pm \frac{\gamma}{2}x} \sinh(\epsilon x) \chi_{\mathbb{R}^{\mp}}$.

Beweis: Der Beweis wird für W_- angegeben. Für W_+ geht er genauso. Gesucht ist $\lim_{t \rightarrow -\infty} U_{-t}^{(0)} U_t \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix}$. In diesem Beweis ist mit ‘ \lim_t ’ immer ‘ $\lim_{t \rightarrow -\infty}$ ’ gemeint. Nach den Gln. 2.20f, S. 58 gilt:

$$U_{-t}^{(0)} U_t \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \stackrel{t \leq 0}{=} \begin{pmatrix} G_-(-t)z - F_-(-t)\bar{z} + i \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(-t) + (F_- * \overline{f^{(l)}} \chi_{\mathbb{R}^+})(-t) \right] \\ f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_- * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(x) + (F_- * \overline{f^{(l)}} \chi_{\mathbb{R}^+})(x) \right] \chi_{[0, -t]}(x) + i\sqrt{\gamma_k}(G_-(x)z - F_-(x)\bar{z}) \chi_{[0, -t]}(x) \end{pmatrix}.$$

Klar ist: $\lim_t G_-(-t) = 0 = \lim_t F_-(-t)$.

Da $G_-, F_-, f^{(l)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ gilt: $\lim_t (G_- * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(-t) = 0$, denn mit $\tilde{G}(x) := \overline{G(-x)}$ ist $(G_- * f^{(l)})(-t) = \langle \tilde{G}_-, S_t f^{(l)} \rangle$ und $\lim_t \langle S_t f, g \rangle = 0 \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Daß $\lim_t G_-(x) \chi_{[0, -t]}(x) = G_-(x)$ und $\lim_t (G_- * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^+})(x) \chi_{[0, -t]} = (G_- * f^{(l)})(x)$

ist, folgt da $G_-, (G_- * f^{(l)})(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Letzteres gilt, da $G_- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und „ $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) * \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ “ (vgl. REED, SIMON, *Fourier Analysis and Self Adjointness*, Spezialfall von Youngs Ungleichung). ■

Der offene parametrische Resonator ist folglich unterhalb der Oszillationsschwelle ebenfalls ein asymptotisch vollständiges System.

Auf und oberhalb der Oszillationsschwelle sind G_{\pm}, F_{\pm} keine $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ -Funktionen, und obiger Beweis gilt nicht mehr. Die Wellenoperatoren existieren dann nicht mehr auf ganz \mathcal{H} , denn die Ausdrücke $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_{-t}^{(0)} U_t \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix}$ konvergieren nur noch auf einem nicht mehr dichten Teilraum von \mathcal{H} . Im fol-

genden ist es günstig, die Zeitentwicklung auf der reellen Teilräumen \mathcal{H}_\pm getrennt zu betrachten.

Satz 2.4.2 (Asymptotisches Verhalten oberhalb der Oszillationsschwelle)

Für $\epsilon \geq \frac{\gamma}{2}$ gilt:

- (1) Der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{-t}^{(0)} U_t \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right)$ existiert
- (a) für alle $\left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{H}_+$ und
- (b) für alle $\left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \{U_r \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{H}_- : \text{supp } g^{(k)} \subset \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}\}$
- und ist dort gegeben durch $W_+ \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right)$ wie im vorigen Satz.
- (2) Ebenso ist $\lim_{t \rightarrow -\infty} U_{-t}^{(0)} U_t \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) = W_- \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right)$
- (a) für alle $\left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{H}_-$ und
- (b) für alle $\left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \{U_r \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{H}_+ : \text{supp } g^{(k)} \subset \mathbb{R}^-, r \in \mathbb{R}\}$.

Beweis: (zu Behauptung (1), Behauptung (2) geht analog)

(a) Betrachtet man für $t > 0$ $U_{-t}^{(0)} U_t \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{H}_+$, so gilt mit Gln. (2.18f):

$$U_{-t}^{(0)} U_t \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \stackrel{t \geq 0}{=} \left(\begin{smallmatrix} (G_+(-t) + F_+(-t))z - i \sum_l \sqrt{\gamma_l} [((G_+ + F_+) * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(-t)] \\ (f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} ((G_+ + F_+) * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(x) \chi_{[-t, 0]}(x) - i \sqrt{\gamma_k} (G_+(x) + F_+(x))z \chi_{[-t, 0]}(x) \end{smallmatrix} \right).$$

$G_+(x) + F_+(x) = e^{(\frac{\gamma}{2} + \epsilon)x} \chi_{\mathbb{R}^-}(x)$ ist auch für $\epsilon \geq \frac{\gamma}{2}$ im $L^2(\mathbb{R})$, daher kann die Existenz des Limes $t \rightarrow \infty$ wie im vorigen Satz gezeigt werden.

Auf \mathcal{H}_- tritt in obigem Ausdruck an der Stelle von $G_+ + F_+$ die Funktion $G_+ - F_+$ auf, die für $\epsilon \geq \frac{\gamma}{2}$ nicht im $L^2(\mathbb{R})$ liegt. Daher existiert der Limes nicht für alle $\left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right)$.

(b) Daß der Limes auf den Urbildern auslaufender Funktionen existiert, ist klar, denn dort wirkt U_t nach endlicher Zeit nur noch als Shift:

$$\lim_t U_{-t}^{(0)} U_t \left(U_s \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \right) = U_s^{(0)} \lim_t U_{-t-s}^{(0)} U_{t+s} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g^{(k)} \end{smallmatrix} \right) = U_s^{(0)} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ g^{(k)} \end{smallmatrix} \right). \quad \blacksquare$$

$(W_\pm, \mathcal{D}(W_\pm))$ sind also unbeschränkte Operatoren auf einem Definitionsbereich $\mathcal{D}(W_\pm) \subset \mathcal{H}$. Es ist mir nicht klar, ob $\mathcal{D}(W_\pm)$ dicht in \mathcal{H} liegt.

An der Oszillationsschwelle gilt jedoch folgendes

Korollar: (Asymptotisches Verhalten an der Oszillationsschwelle)

Im Spezialfall $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ gilt auf einem dichten Teilraum von \mathcal{H}_- :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_{-t}^{(0)} U_t \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} z_\infty \\ f_\infty^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{H}_-.$$

Beweis: Für $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ ist $G_+(x) - F_-(x) = \chi_{\mathbb{R}^-}(x)$ und somit gilt:

$$U_{-t}^{(0)} U_t \left(\begin{smallmatrix} z \\ f^{(k)} \end{smallmatrix} \right) \stackrel{t \geq 0}{=} \left(\begin{smallmatrix} (z - i \sum_l \sqrt{\gamma_l} (\chi_{\mathbb{R}^-} * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(-t)) \\ (f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} (\chi_{\mathbb{R}^-} * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(x) \chi_{[-t, 0]}(x) - i \sqrt{\gamma_k} z \chi_{[-t, 0]}(x) \end{smallmatrix} \right).$$

Zwei Ausdrücke machen für $t \rightarrow \infty$ Schwierigkeiten: $(\chi_{\mathbb{R}^-} * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(-t) = \int_{-t}^0 f(u) du$ und $(\chi_{\mathbb{R}^-} * f^{(l)} \chi_{\mathbb{R}^-})(x) \chi_{[-t,0]}(x) = \int_x^0 f^{(l)}(u) du \chi_{[-t,0]}(x)$.

Der erste Ausdruck existiert für $f \in S(\mathbb{R})$ auch für $t \rightarrow \infty$, da $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Der zweite Term liegt auch im $\lim_{t \rightarrow \infty}$ im $L^2(\mathbb{R})$, falls z.B. $f^{(l)}$ die Ableitung einer bei $x = 0$ verschwindenden, schnellfallenden Funktion ist. Da $\frac{d}{dx}S(\mathbb{R})$ dicht in $S(\mathbb{R})$ und $S(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, folgt die Behauptung. ■ Das heißt, zumindest in diesem Fall ist $\text{stop-lim}_{t \rightarrow \infty} U_{-t}^{(0)} U_t =: W_+$ ein *dicht definierter* symplektischer Operator auf \mathcal{H} .

2.4.3 Streuoperator und Input-Output-Beziehung

Sei nun wieder $\epsilon < \frac{\gamma}{2}$. Der Streuoperator $S = W_+(W_-)^{-1} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ ist gegeben durch

$$S(f^{(k)}) = \left(f^{(k)} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{\gamma_l} \left[(G_+ * f^{(l)})(x) + (F_+ * \overline{f^{(l)}})(x) \right] \right) \quad (2.44)$$

und im Fourierbild durch

$$\hat{S}(\widehat{f^{(k)}}) = \left(\widehat{f^{(k)}} - \sqrt{\gamma_k} \sum_l \sqrt{2\pi\gamma_l} \left[\widehat{G_+} \widehat{f^{(l)}} + \widehat{F_+} \widehat{f^{(l)}} \right] \right) \quad (2.45)$$

mit

$$\widehat{G_+}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\frac{\gamma}{2} - i\omega}{\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega\right)^2 - \epsilon^2},$$

$$\widehat{F_+}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-\epsilon}{\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega\right)^2 - \epsilon^2}.$$

Beachtet man, daß $\text{FT}[\bar{f}](\omega) = \overline{\text{FT}[f]}(-\omega)$, so sieht man, daß der Streuoperator Moden verschiedener Frequenz miteinander mischt: eine Anregung bei der Frequenz ω im einlaufenden freien Zustand führt nach der Streuung zu Anregungen bei den Frequenzen $\pm\omega$ (alle Frequenzangaben beziehen sich auf den Nullpunkt ω_0).

Input-Output-Beziehung

Die Relationen

$$f_{out} = S f_{in}$$

zwischen (zum selben Streuzustand gehörenden) ein- und auslaufenden freien Zuständen und

$$U_t \Omega_+ f - U_t \Omega_- f = i\sqrt{\gamma} \int_{\mathbb{R}} f(s-t) U_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwischen (zum selben freien Zustand gehörenden) ein- und auslaufenden Streuzuständen gelten auch für die symplektische Zeitentwicklung unverändert und erlauben durch Zweitquantisierung eine Ableitung der Beziehung zwischen Input- und Output-Observablen.

2.5 Die Zweitquantisierung der symplektischen Zeitentwicklung

Die symplektischen Abbildungen $U_t, W_{\pm}, \Omega_{\pm}, S$ aus dem vorigen Abschnitt können in der in den Abschnitten 1.2.3 und 1.3.2 beschriebenen Art zweitquantisiert werden. Die zugehörigen Bogoliubov-Transformationen auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ werden wieder mit $\alpha_t, \alpha_{W_{\pm}}, \dots$ bezeichnet.

2.5.1 Die quasifreie Zeitentwicklung

Es ist also wieder

$$\alpha_t : W \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \mapsto W \left(U_t \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} \right).$$

Der Hauptunterschied zur Dynamik aus Kapitel 1 besteht darin, daß U_t nun nicht mehr komplex-linear ist. Das führt dazu, daß α_t Erzeuger und Vernichter vermischt.

Sei wieder $a(t) := \alpha_t(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, dann gilt z.B.:

$$a(t) = A \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cosh \epsilon t \\ -i\sqrt{\gamma_k} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-x)} \cosh \epsilon(t-x) \chi_{[0,t]}(x) \end{pmatrix} + A^\dagger \begin{pmatrix} -e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sinh \epsilon t \\ -i\sqrt{\gamma_k} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-x)} \sinh \epsilon(t-x) \chi_{[0,t]}(x) \end{pmatrix}.$$

Mit Gl. (2.26) folgt

$$A \begin{pmatrix} z \\ f^{(k)} \end{pmatrix} (t) = \bar{z} a(t) + A \begin{pmatrix} 0 \\ S_t f^{(k)} \end{pmatrix} + i \sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_0^t \overline{f^{(l)}(s-t)} a(s) ds, \quad (2.46)$$

wobei für $a(t)$ obiger Ausdruck einzusetzen ist.

Leichter rechnen läßt sich oft im Schrödingerbild. Die zu α_t duale Transformation auf $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ wird wie in Abschnitt 1.2.3 mit ν_t bezeichnet.

Squeezing durch ν_t

Die Behauptung, daß die Zeitentwicklung ν_t zu Zuständen führt, in denen die Schwankung bestimmter Feldobservablen unterhalb der Vakuumfluktuationen liegt, wird nun an einigen Beispielen belegt.

Zunächst wird ein Glauberzustand zur Testfunktion $g \in \mathcal{H}$ betrachtet. Für den Feldoperator $\Phi(f)$ zur Testfunktion f gilt:

$$\varphi(\Phi(f)) = 2\text{Im}\langle g, f \rangle, \quad \varphi(\Phi(f)^2) = \|f\|^2 + 4(\text{Im}\langle g, f \rangle)^2, \quad \text{Var}(\Phi(f); \varphi) = \|f\|^2.$$

Die Varianz eines Feldoperators in einem Glauberzustand zur Testfunktion g ist somit *unabhängig* von der Testfunktion und hängt nur von der betrachteten Observable ab.

Im transformierten Zustand $\nu_t(\varphi)$ gilt

$$\nu_t(\varphi)(\Phi(f)) = 2\text{Im}\langle g, U_t f \rangle, \quad \nu_t(\varphi)(\Phi(f)^2) = \|U_t f\|^2 + 4(\text{Im}\langle g, U_t f \rangle)^2$$

und damit

$$\text{Var}(\Phi(f); \nu_t(\varphi)) = \|U_t f\|^2.$$

Also wird der Zustand φ durch ν_t gesqueezed, wenn $\|U_t f\|^2 < \|f\|^2$ ist.

Beispiel 2.5.1 (Squeezing im Resonator)

Zunächst sei das Feld im Resonator betrachtet, speziell die Observablen $\Phi(f)$ zu den Testfunktionen $\binom{i}{0}$ und $\binom{1}{0}$. Setzt man $U_{t>0}$ aus Gl. (2.29) ein, so erhält man:

$$\text{Var}(\Phi\left(\binom{i}{0}\right); \nu_t(\varphi)) = \|U_t\left(\binom{i}{0}\right)\|^2 = \frac{\gamma}{\gamma + 2\epsilon} + \frac{2\epsilon}{\gamma + 2\epsilon} e^{-(\gamma+2\epsilon)t} < 1.$$

$\Phi\left(\binom{i}{0}\right)$ schwankt im zeitentwickelten Zustand also tatsächlich weniger als im Vakuumzustand.

Für große Zeiten gilt $\text{Var}(\Phi\left(\binom{i}{0}\right); \nu_t(\varphi)) \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma+2\epsilon}$. Dieses Ergebnis stimmt (für $\|f\|^2 = 1$) mit [1], Gl. 10.2.18 überein, wenn man berücksichtigt, daß dort statt $\Phi(f)$ die Operatoren $X(f) := 2\Phi(f)$ betrachtet werden und außerdem die normalgeordnete Varianz $\text{Var}(:\Phi(f):; \varphi) = \text{Var}(\Phi(f); \varphi) - \|f\|^2$ verwendet wird.

Bei $\epsilon \approx \frac{\gamma}{2}$ kann damit eine Reduktion der Schwankung auf 50% erreicht werden. Noch stärkere Rauschunterdrückung im Resonator ist nur bei Überschreiten der Oszillationsschwelle möglich. Dies führt dann allerdings zu exponentiell divergierender Varianz in der kanonisch konjugierten Observablen $\Phi\left(\binom{1}{0}\right)$:

Für $\gamma \neq 2\epsilon$ ist

$$\text{Var}\left(\Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \nu_t(\varphi)\right) = \|U_t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 2\epsilon} + \frac{-2\epsilon}{\gamma - 2\epsilon} e^{-(\gamma - 2\epsilon)t} > 1.$$

Für $2\epsilon < \gamma$ und $t \rightarrow \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen $\frac{\gamma}{\gamma - 2\epsilon}$, das Produkt der Unschärfen der kanonisch konjugierten Observablen ist also nicht minimal. Im Fall $\gamma = 2\epsilon$ ergibt sich: $\text{Var}\left(\Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \nu_t(\varphi)\right) = 1 + \gamma t$.

Auf und oberhalb der Oszillationsschwelle divergiert die Varianz von $\Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \rightarrow \infty$ (zur PDC above threshold: vgl. Bsp.2.5.4).

2.5.2 Streutheorie und Input-Output-Relation

Vor weiteren Beispielrechnungen seien noch die Beziehungen zwischen ein- und auslaufenden Observablen in $\text{CCR}(\mathcal{H}_0)$ und in $\text{CCR}(\mathcal{H})$ angegeben: So gehört zum Vernichter der (einlaufenden freien) Testfunktion $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_0$ der (auslaufende freie) Operator $\alpha_S A\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \alpha_S A\begin{pmatrix} \hat{f} \\ 0 \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} \frac{(\frac{\gamma_2}{2} - i\omega)^2 - (\frac{\gamma_1}{2})^2 - \epsilon^2}{(\frac{\gamma}{2} - i\omega)^2 - \epsilon^2} \hat{f} \\ 0 \end{pmatrix} + A^\dagger\begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 \epsilon}{(\frac{\gamma}{2} - i\omega)^2 - \epsilon^2} \hat{\bar{f}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma}{2} - i\omega \\ (\frac{\gamma}{2} - i\omega)^2 - \epsilon^2} \hat{f} + \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} A^\dagger\begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \\ (\frac{\gamma}{2} - i\omega)^2 - \epsilon^2} \hat{\bar{f}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

(hier im Frequenzbild angegeben). Setzt man $f = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega x}$ (d.h. $\hat{f}(\omega') = \delta(\omega' - \omega)$ und $\hat{\bar{f}}(\omega') = \delta(\omega' + \omega)$), so können die Faktoren vor $\hat{f}, \hat{\bar{f}}$ vor die Operatoren gezogen werden, und man erhält Gl. (2.7).

Die zu $W(f)$ gehörenden ein- und auslaufende Streuobservablen genügen der Beziehung

$$\alpha_t \alpha_{\Omega_+} W(f) - \alpha_t \alpha_{\Omega_-} W(f) = W\left(\sum_l \sqrt{\gamma_l} \int_{\mathbb{R}} U_s\begin{pmatrix} -if(s-t) \\ 0 \end{pmatrix} ds\right).$$

Da sie nicht weiter verwendet wird, sei auf eine Übertragung auf Erzeuger und Vernichter von Streuzuständen verzichtet.

2.5.3 Beispiele

In diesem Abschnitt wird anhand einiger Beispiele die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Formalismus gezeigt. Zunächst wird nachgerechnet, daß der

parametrische Resonator tatsächlich zur Erzeugung gequetschten Lichts geeignet ist und die Schwankungen im Outputfeld beliebig reduziert werden können. Im nächsten geht es um den Zustand des *gequetschten Vakuums*. Zum Abschluß des Kapitels wird dann noch kurz der parametrische Resonator oberhalb der Oszillationsschwelle betrachtet.

Beispiel 2.5.2 Squeezing im Output-Feld I: Input im Glauber-Zustand $e(g)$
 Das Bad sei in der fernen Vergangenheit im Glauberzustand $\varphi = e(g)$ präpariert. Der zugehörige auslaufende freie Zustand ist durch $\nu_S(\varphi)$ gegeben. Er ist bezüglich φ $\Phi(f)$ -gesqueezed für alle rein reellen Testfunktionen f .

Beweis: Der Glauberzustand $\varphi = e(g)$ wird durch die Streuung am parametrischen Resonator in der Observablen $\Phi(f)$ gesqueezed, wenn $\text{Var}(\Phi(f); \varphi) > \text{Var}(\Phi(f); \nu_S(\varphi))$. Es gilt (vgl. 71 vor Bsp. 2.5.1) unabhängig von g :

$$\text{Var}(\Phi(f); \varphi) = \|f\|^2$$

und

$$\text{Var}(\Phi(f); \nu_S(\varphi)) = \|Sf\|^2.$$

Wählt man nun als Observable $\Phi(f)$ den Feldoperator zur Testfunktion $f = (f^{(1)}, 0) \in \mathcal{H}_0$, so gilt (mit den Bezeichnungen aus Gl. (2.45), S. 69):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Phi(f); \nu_S(\varphi_{e(g)})) &= \|Sf\|^2 = \|\widehat{S}\widehat{f}\|^2 \\ &= \|(1 - \gamma_1\sqrt{2\pi}\widehat{G}_+)f^{(1)} - \gamma_1\sqrt{2\pi}\widehat{F}_+f^{(1)}\|^2 \\ &\quad + 2\pi\gamma_1\gamma_2\|\widehat{G}_+f^{(1)} + \widehat{F}_+f^{(1)}\|^2 \\ &\stackrel{f \equiv \bar{f}}{=} \|(1 - \gamma_1\sqrt{2\pi}(\widehat{G}_+ + \widehat{F}_+))f^{(1)}\|^2 + 2\pi\gamma_1\gamma_2\|(\widehat{G}_+ + \widehat{F}_+)f^{(1)}\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} + \epsilon)^2 - 2\gamma_1\epsilon + \omega^2}{(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} + \epsilon)^2 + \omega^2} |f^{(1)}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Der Faktor vor $|f^{(1)}(\omega)|^2$ sei mit $\sigma(\omega, \gamma_k, \epsilon)$ bezeichnet. Da er für alle ω kleiner als eins ist, ist die Schwankung in der Observablen $\Phi(f)$ im gestreuten Zustand reduziert.

Dies gilt offenbar für alle reellen Testfunktionen $f^{(1)}$, so daß in der Sprechweise von Mandel und Wolf squeezing in the full sense vorliegt (im Unterschied zu der Situation, in der nur einzelne Moden des Feldes gesqueezed sind).

Am stärksten gequetscht ist die Mode der Frequenz $\omega = 0$.

σ hat als Funktion von ω für alle $\gamma, \epsilon > 0$ ein Minimum bei $\omega = 0$. Für gegebene γ_1, γ_2 und feste Frequenz ω läßt sich die Stärke des Pumpstrahls bestimmen, bei der der gestreute Zustand bzgl. der Observablen $\Phi(f)$ optimal gesqueezed ist. Dazu muß $\frac{d}{d\epsilon}\sigma(\omega, \gamma_k, \epsilon) = 0$ sein. Das ist für $\epsilon = \sqrt{(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2})^2 + \omega^2}$ der Fall.

Die stärkste Rauschunterdrückung ist also in den Moden um $\omega = 0$ an der Oszillationsschwelle zu erwarten. Es ist $\sigma(0, \gamma_k, \frac{\gamma}{2}) = \frac{\gamma_2}{\gamma^2}$. Das zeigt, daß mit dem einseitigen OPR ($\gamma_2 = 0$) die Schwankung in den Feldoperatoren zu reellen Moden bei $\omega = 0$ beliebig stark reduziert werden kann: durch die Streuung am einseitigen parametrischen Resonator kann ein „Eigenzustand“ zur „Observablen“ $\Phi(1)$ präpariert werden.

Wählt man f nicht rein reell, sondern rein imaginär, so gilt $\|Sf\|^2 > \|f\|^2$, d.h. die Schwankung der entsprechenden Observable wird vergrößert.

Gequetschtes Weißes Rauschen (Squeezed White Noise)

Gequetschtes Weißes Rauschen (squeezed white noise, SWN) beschreibt ein Feld, das relativ zu einem Temperaturzustand in allen Feldoperatoren $\Phi(f)$ mit $f e^{i\theta} \in \mathbb{R}$ gesqueezed (und in den kanonisch konjugierten Feldoperatoren gestretched) ist.

Die SWN-Zustände bilden eine zweiparametrische Familie von quasifreien Zuständen, die durch die reell-lineare, symmetrische Bilinearform $s_{n,c}$

$$s_{n,c}(f, g) = (2n + 1)\text{Re}\langle f, g \rangle + 2\text{Re}(c\langle f, Jg \rangle)$$

bestimmt sind (vgl. [16]). (Dabei ist J eine antilineare Involution und für die Parameter $n \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ muß gelten: $n \geq 0$ und $n(n + 1) \geq |c|^2$.) Das charakteristische Funktional des squeezed white noise Zustands $\varphi_{n,c}$ ist

$$C_{\varphi_{n,c}}(f) = e^{-\frac{1}{2}s_{n,c}(f,f)}.$$

Der Parameter n ist ein Maß für die Temperatur des Felds im Zustand $\varphi_{n,c}$ und $|c|$ ein Maß für die Stärke des Squeezings; $\arg c$ gibt an, welche Observablen gesqueezed sind.

Die Temperaturzustände des Weißen Rauschens sind spezielle (nicht gequetschte) SWN-Zustände ($c = 0$).¹¹

In [16] wird gezeigt, daß man genau die SWN-Zustände erhält, wenn man die Squeeze-Operatoren $S(\epsilon) = \nu_{Q(\epsilon)}, \mathbb{C} \ni \epsilon = e^{i2\theta}$ (vgl. Gl. (2.1), S. 49) auf die (white noise)-Temperaturzustände (vgl. S. 37) anwendet.

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, daß (aus geeignetem Input) durch Streuung am parametrischen Resonator Zustände entstehen, die in der Schmalbandnäherung durch SWN-Zustände beschrieben werden können. In die-

¹¹Üblicherweise wird SWN wie in [1], S. 333ff und [7], S. 1 durch die Erwartungswerte von Produkten von Erzeugern und Vernichtern eingeführt. Diese Definition ist äquivalent zur oben gegebenen, falls man dazusagt, daß es sich um einen quasifreien Zustand handeln soll.

ser Näherung stellt der OPR die experimentelle Realisierung des Squeeze-Operators $S(\epsilon)$ dar.

Beispiel 2.5.3 (Die Erzeugung von Gequetschtem Weißem Rauschen)

Es wird der einseitige parametrische Resonator betrachtet. Die Umgebung werde im Vakuumzustand $\varphi_F = \varphi_{0,0}$ präpariert. Dann gilt:

Der zu φ_F gehörende auslaufende freie Zustand $\nu_S(\varphi_F)$ läßt sich in der Schmalbandnäherung durch ein Gequetschtes Weißes Rauschen beschreiben.

Zum Beweis wird jetzt das charakteristische Funktional des auslaufenden freien Zustands berechnet: Es ist $\nu_S(\varphi_F)(W(f)) = e^{-\frac{1}{2}\|Sf\|^2}$.

Nach Gl. (2.45), S. 69 hat der Streuoperator einen linearen und einen antilinearen Anteil, die im Frequenzbild beide durch Multiplikation mit einer Funktion (σ_l bzw. σ_a) gegeben sind: $Sf = S_l f + S_a f = \sigma_l f + \sigma_a Jf$. Die antilineare Involution J ist definiert durch $Jf(\omega) = \overline{f(-\omega)}$. Dann gilt:

$$\|Sf\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\sigma_l(\omega)|^2 |f(\omega)|^2 d\omega + \int_{\mathbb{R}} |\sigma_a(\omega)|^2 |Jf(\omega)|^2 d\omega + 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \overline{\sigma_l(\omega)} \sigma_a(\omega) \overline{f(\omega)} Jf(\omega) d\omega.$$

Setzt man $\sigma_l(\omega) = -\frac{(\frac{\gamma}{2})^2 + \omega^2 + \epsilon^2}{(\frac{\gamma}{2})^2 - \omega^2 - \epsilon^2 - i\gamma\omega}$ und $\sigma_a(\omega) = \frac{\gamma\epsilon}{(\frac{\gamma}{2})^2 - \omega^2 - \epsilon^2 - i\gamma\omega}$ ein, so folgt, da $|\sigma(-\omega)|^2 = |\sigma(\omega)|^2$ ist,

$$\|Sf\|^2 = \langle (|\sigma_l|^2 + |\sigma_a|^2) f, f \rangle + 2\operatorname{Re} \langle \overline{\sigma_l} \sigma_a f, Jf \rangle.$$

Dieser Ausdruck wäre von der squeezed white noise Form, wenn die Faktoren von f konstant wären.

Es gilt: $\frac{d}{d\omega} (|\sigma_l|^2 + |\sigma_a|^2)|_{\omega=0} = 0 = \frac{d}{d\omega} (\overline{\sigma_l} \sigma_a)|_{\omega=0}$. Daher ist in einem engen Frequenzband um $\omega = 0$ tatsächlich $|\sigma_l(\omega)|^2 + |\sigma_a(\omega)|^2 = |\sigma_l(0)|^2 + |\sigma_a(0)|^2 + o(\omega^2) \approx \text{const}$ und $\overline{\sigma_l(\omega)} \sigma_a(\omega) = \overline{\sigma_l(0)} \sigma_a(0) + o(\omega^2) \approx \text{const}$.

Schon bei der Wahl des Hamiltonians, der zu dem hier verwendeten Streuoperator führte, wurde das elektromagnetische Feld der Umgebung als Weißes Rauschen genähert (siehe S. 9), d.h. schon dort wurden die zulässigen Testfunktionen auf ein schmales Frequenzband um ω_0 eingeschränkt. In der gleichen Näherung gilt nun:

$$\|Sf\|^2 \approx (|\sigma_l(0)|^2 + |\sigma_a(0)|^2) \langle f, f \rangle + 2\operatorname{Re} \left(\overline{\sigma_l(0)} \sigma_a(0) \langle f, Jf \rangle \right).$$

Das charakteristische Funktional des Zustands $\nu_S(\varphi_F)$ ist dann

$$C_{\nu_S(\varphi_F)}(f) \approx e^{-\frac{1}{2}((2n+1)\operatorname{Re}\langle f, f \rangle + 2\operatorname{Re}\langle c(f, Jf) \rangle)}.$$

Die Parameter n, c sind $n = \left(\frac{\gamma\epsilon}{(\frac{\gamma}{2})^2 - \epsilon^2}\right)^2$ und $c = \gamma\epsilon \frac{(\frac{\gamma}{2})^2 + \epsilon^2}{((\frac{\gamma}{2})^2 - \epsilon^2)^2}$. Man rechnet leicht nach, daß sie die Bedingungen $n \geq 0, n(n+1) \geq |c|^2$ erfüllen.

Also kann in der Schmalband-Näherung der Zustand lange nach der Streuung durch Gequetschtes Weißes Rauschen mit den angegebenen Parametern beschrieben werden.

Wie in [7], Kor. 1.4.10/11, gezeigt, sind die SWN-Zustände *nicht äquivalent* zum Fockzustand. Daher sind sie nicht als Dichtematrizen auf dem Fockraum darstellbar. Die Streuung am OPR führt also aus dem Fockraum hinaus. Damit stellt sie ein gutes Beispiel für die Unzulänglichkeit des Fockraum-Formalismus dar.

Der parametrische Resonator oberhalb der Oszillationsschwelle

Am Ende von Abschnitt 2.4 wurde gezeigt, daß auf und oberhalb der Oszillationsschwelle die Wellenoperatoren nicht mehr auf ganz \mathcal{H} definiert sind.

Es ist jedoch im Einzelfall möglich, Aussagen über das asymptotische Verhalten eines Zustands φ für $t \rightarrow \infty$ zu machen, z.B. den Grenzwert der Erwartungswerte der Weyloperatoren

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\varphi)(W\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix})$$

zu berechnen. Das soll jetzt am Beispiel des Fockzustands vorgeführt werden.

Beispiel 2.5.4 (Parametrische Verstärkung oberhalb der Oszillationsschwelle)

Der Übersichtlichkeit halber wird ein einseitiger Resonator betrachtet, d.h. $\gamma_2 = 0$ gesetzt. Sei jetzt $\epsilon > \frac{\gamma}{2}$ und sei φ_F der Fockzustand auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$. Dann ist für alle $t > 0$

$$C_{F,t}\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} := \nu_t(\varphi_F)(W\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}) = e^{-\frac{1}{2}\|U_t(z)\|^2}.$$

Es stellt sich die Frage, ob $C_{F,t}$ auch im Limes $t \rightarrow \infty$ das charakteristische Funktional eines Zustands ist.

Sei $\mathcal{H}_\infty := \left\{\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : \lim_t C_{F,t}\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \text{ existiert}\right\}$. Auf diesem Teilraum von \mathcal{H} bleiben die Bedingungen „ $C(0) = 1$ “ und „ $(x, y) \mapsto C(x-y)e^{i\sigma(x,y)}$ ist positiv definiter Kern“ (vgl. Anhang A) auch beim Grenzübergang erhalten. Daher ist $C_{F,\infty}$ charakteristisches Funktional eines Zustands auf $\text{CCR}(\mathcal{H}_\infty)$.

Nun ist $\lim_t \|U_t(z)\|^2$ zu untersuchen. Jedes $\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ läßt sich eindeutig als Summe von zwei Elementen aus den reellen Teilräumen \mathcal{H}_\pm (vgl. S.61)

schreiben: $\binom{z}{f} = \binom{z_+}{f_+} + \binom{z_-}{f_-}$ und es gilt: $\|U_t\binom{z}{f}\|^2 = \|U_t\binom{z_+}{f_+}\|^2 + \|U_t\binom{z_-}{f_-}\|^2$. (Beweis: $\|\cdot\|^2 = \operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ und \mathcal{H}_\pm sind orthogonal zueinander bezüglich des reellen Skalarprodukts $\operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$.) Daher kann $\lim_t \|U_t\binom{z}{f}\|^2$ auf den \mathcal{H}_\pm getrennt betrachtet werden.

1. Wie in Satz 2.4.2 gezeigt, gilt auf \mathcal{H}_+ $\lim_t U_t\binom{z}{f} = \lim_t U_t^{(0)}W_+\binom{z}{f}$, d.h. $\binom{z}{f}$ verhält sich asymptotisch frei. Damit ist $\lim_t \|U_t\binom{z}{f}\|^2 = \|W_+\binom{z}{f}\|^2$ und somit $\lim_t C_{F,t}\binom{z}{f} = \exp(-\frac{1}{2}\|W_+\binom{z}{f}\|^2) \forall \binom{z}{f} \in \mathcal{H}_+$.
2. Wie ebenfalls in Satz 2.4.2 gezeigt, existiert $\lim_t U_{-t}^{(0)}U_t\binom{z}{f}$ auch auf einem Teilraum von \mathcal{H}_- , nämlich auf den auslaufenden Funktionen und ihren Urbildern: auf $M := \operatorname{LH}_{\mathbb{R}}\{U_s\binom{0}{g} \in \mathcal{H}_- : \operatorname{supp} g \subseteq \mathbb{R}^+, s \in \mathbb{R}\}$ gilt wieder: $\lim_t U_{-t}^{(0)}U_t\binom{z}{f} = W_+\binom{z}{f}$ (mit W_+ wie in Abschnitt 2.4) und damit $\lim_t C_{F,t}\binom{z}{f} = \exp(-\frac{1}{2}\|W_+\binom{z}{f}\|^2) \forall \binom{z}{f} \in M \subset \mathcal{H}_-$.
3. $\|U_t\binom{1}{0}\|$ divergiert für $t \rightarrow \infty$ bestimmt gegen ∞ . Offensichtlich gilt dasselbe auf allen (Ur)Bildern von $\binom{r}{0}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Auf diesen Testfunktionen verschwindet folglich $C_{F,t}$ im Limes $t \rightarrow \infty$.
4. Sei nun $\binom{z}{f} \in \mathcal{H}_-$ mit $f = f_+ + f_-$, $\operatorname{supp} f_\pm \subseteq \mathbb{R}^\pm$ und $\operatorname{supp} f_-$ kompakt. Dann gilt: $\|U_t\binom{z}{f}\|^2 = \|U_t\binom{z}{f_-}\|^2 + \|U_t\binom{0}{f_+}\|^2$, da $U_t\binom{z}{f_-} \perp U_t\binom{0}{f_+} \forall t > 0$. Da $\operatorname{supp} f_-$ kompakt, existiert zudem $T > 0$, so daß $U_T\binom{z}{f_-} =: \binom{z_T}{f_T}$ mit $\operatorname{supp} f_T \subset \mathbb{R}^+$. Damit gilt dann für alle $t > T$: $\|U_t\binom{z}{f}\|^2 = \|U_t\binom{z}{f_-}\|^2 + \|U_t\binom{0}{f_+}\|^2 = \|U_{t-T}\binom{z_T}{f_T}\|^2 + \|U_t\binom{0}{f_+}\|^2 = \|U_{t-T}\binom{z_T}{f_T}\|^2 + \|U_{t-T}\binom{0}{f_+}\|^2 + \|U_t\binom{0}{f_+}\|^2$. Auf den auslaufenden Funktionen ist $U_t = U_t^{(0)}$, folglich ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_t\binom{z}{f}\|^2 = \|\binom{0}{f_T}\|^2 + \|\binom{0}{f_+}\|^2$, falls $z_T = 0$ und $+\infty$ sonst. Damit ist $\lim_t C_{F,t}\binom{z}{f}$ auf einem dichten Teilraum von \mathcal{H}_- bestimmt.

Mit diesen Ergebnissen kann jetzt das charakteristische Funktional $C_{F,\infty}$ des Limes-Zustands angegeben werden:

1. Auf \mathcal{H}_+ ist $C_{f,\infty}\binom{z}{f} = e^{-\frac{1}{2}\|W_+\binom{z}{f}\|^2}$,
2. auf dem in \mathcal{H}_- dichten Teilraum $\{\binom{z}{f} \in \mathcal{H}_- : \operatorname{supp} f \cap \mathbb{R}^- \text{ kompakt}\}$ gilt: sei $T > 0$ so, daß $\operatorname{supp} f \subseteq [-T, \infty)$, falls $\langle \binom{1}{0}, U_T\binom{z}{f} \rangle = 0$, dann ist $C_{f,\infty}\binom{z}{f} = e^{-\frac{1}{2}\|W_+\binom{z}{f}\|^2}$, anderenfalls ist $C_{f,\infty}\binom{z}{f} = 0$.

Damit beschreibt $C_{F,\infty}$ einen Zustand $\varphi_{F,\infty}$ auf der CCR-Algebra über dem Prähilbertraum $\mathcal{E} := \mathcal{H}_+ \oplus \{\binom{z}{f} \in \mathcal{H}_- : \operatorname{supp} f \cap \mathbb{R}^- \text{ ist kompakt}\}$.

Der Zustand $\varphi_{F,\infty}$ ist nicht regulär, da $C_{F,\infty}(\overset{c}{0}) = 0 \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $C_{F,\infty}(0) = 1$. Also ist $\varphi_{F,\infty}$ nicht quasiäquivalent zum Fockzustand, d.h. die Zeitentwicklung führt im Limes aus dem Fockraum hinaus.

Zumindest im Fall $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ ist der Limeszustand quasifrei. Dann folgt, daß φ_∞ disjunkt zum Fockzustand ist, d.h. die beiden Zustände sind klassisch unterscheidbar.

Wie ist das Verschwinden des charakteristischen Funktionals auf Testfunktionen f physikalisch zu interpretieren?

Da immer $C_\varphi(0) = 1$ gilt, ist dann $t \mapsto C_\varphi(tf)$ unstetig in $t = 0$. Folglich ist φ nicht regulär und insbesondere existiert der Feldoperator $\Phi(f)$ nicht.

Für alle Zeiten t ist der im Beispiel untersuchte Zustand $\varphi_{F,t}$ ein quasifreier Zustand mit beschränkter Bilinearform $B_t(f, g) = \langle U_t f, U_t g \rangle$. Nach Lemma A.2 ist der Erwartungswert des Teilchenzahloperators $N(f)$ zur normierten Mode f in einem quasifreien Zustand φ mit Bilinearform B gegeben durch $\varphi(N(f)) = \frac{1}{4}(B(f, f) + B(if, if)) - \frac{1}{2}$. Sei nun $f \in \mathcal{H}_-$, dann ist $if \in \mathcal{H}_+$ und es gilt: $\varphi_{F,t}(N(f)) = \frac{1}{4}\|U_t f\|^2 + \frac{1}{4}\|U_t if\|^2 - \frac{1}{2}$.

Die Testfunktionen, auf denen $C_{F,t}$ verschwindet, sind also genau die, die Moden beschreiben, in denen die Teilchenzahl divergiert: es werden so viele Pump photons konvertiert, daß in der fernen Zukunft auch bei der Signalfrequenz eine makroskopische Anregung des Felds der Umgebung vorliegt.

Qualitativ ist dieses Verhalten plausibel, es ist aber nicht anzunehmen, daß diese Ergebnisse quantitativ richtig sind, da man spätestens im Limes $t \rightarrow \infty$ den Gültigkeitsbereich der parametrischen Näherung verläßt.

Kapitel 3

Weitere Input-Output-Systeme

In Abschnitt 1.2 werden der offene Hohlraumresonator und das umgebende elektromagnetische Feld durch die unitäre Dilatation der Halbgruppe $e^{\lambda t}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ beschrieben. Dieser Ansatz basiert auf vier Modellannahmen: Die Umgebung wird als Weißes Rauschen beschrieben, die Kopplung wird in Drehwellen- und Markov-Näherung angesetzt, und im Hohlraum wird nur eine Mode berücksichtigt.

Vor allem die beiden ersten Näherungen waren wesentlich für die durchgeführten Untersuchungen: Die Drehwellennäherung führte zu einer quasifreien Dynamik und das Weiße Rauschen zur Anwendbarkeit der Lax-Phillipsschen Streutheorie.

In den nächsten beiden Abschnitten wird skizziert, wie man anhand der Ergebnisse aus [4, 5] ohne je eine der beiden letzten Näherungen auskommen kann.

3.1 Hohlraumresonator mit regulärer Kopplung

Die Markov-Näherung führt in Abschnitt 1.2 dazu, daß die Dynamik des Hohlraumresonators durch eine *Halbgruppe* beschrieben wird und somit die Resultate von [4] anwendbar sind.

M. EPPLE zeigte in seiner Diplomarbeit [5], daß sich die Ergebnisse von KÜMMERER und SCHRÖDER über die Kopplungsdarstellung der unitären Dilatation einer Halbgruppe auf einem Hilbertraum \mathcal{H} für den Spezialfall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ auf eine größere Klasse von Zeitentwicklungen ausdehnen lassen: *Jede positiv definite Funktion*¹ $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutige Kopp-

¹Eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv definit*, falls $\forall t_k \in \mathbb{R}$ und $\forall z_i \in \mathbb{C}$ gilt: $\sum_{k,l=1}^N \rho_{t_k-t_l} z_k \bar{z}_l \geq 0$. Insbesondere folgt dann $|\rho_t| \leq \rho_0$ und $\rho_{-t} = \bar{\rho}_t$. Für weitere Eigenschaften vgl. [5].

lungsdilatation und kann somit als die Dynamik eines Quantensystems interpretiert werden, das an eine durch Weißes Rauschen modellierte Umgebung gekoppelt ist. Auch ohne die Markov-Näherung steht also eine unitäre Zeitentwicklung auf dem Einteilchenraum des zusammengesetzten Systems und nach kanonischer Zweitquantisierung auch auf der zugehörigen CCR-Algebra zur Verfügung.

Da jede Kopplung zwischen eindimensionalem System und Umgebung durch eine *reguläre Kopplung* (vgl. [5], S.70ff und S.101ff) approximiert werden kann, genügt es, hier nur diesen Fall zu betrachten. Ein reguläre Kopplung wird durch ein endliches Kopplungsmaß ν beschrieben. Weiterhin wird das Kopplungsmaß im folgenden bezüglich des Lebesguemaßes absolutstetig² sein. Nur unter dieser Bedingung kann eine positiv definite Subdynamik ρ durch Kopplung an einen Shift, d.h. an Weißes Rauschen, dilatiert werden.

Im folgenden bezeichnet ρ_t eine positiv definite Funktion, die die Dynamik des offenen eindimensionalen Systems beschreibt. Dabei sei $\rho_0 = 1$.

Die Kopplungsdilatation U_t von ρ_t ist (im Frequenzbild) gegeben durch $U_t : \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}), U_t = \exp(-itH)$ mit

$$H := \begin{pmatrix} z \mapsto \omega_0 z & f \mapsto \langle g, f \rangle \\ z \mapsto z g & f \mapsto M_\omega f \end{pmatrix}, \mathcal{D}(H) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{D}(M_\omega). \quad (3.1)$$

Die Kopplungsfunktion g wird in [5] für gegebenes ρ bestimmt. Es ist $g(\omega) = (\frac{d\nu}{d\omega})^{\frac{1}{2}}$. Offensichtlich beschreibt dieser Hamilton-Operator ein physikalisches System, das sich von dem in Abschnitt 1.2 besprochenen nur durch die Frequenzabhängigkeit der Kopplung (beschrieben durch $g(\omega) \neq \text{const}$)³ Man spricht von „farbiger Kopplung an weißes Rauschen“. Formal erhält man im Limes „ $g \rightarrow \text{const}$ “ wieder den Markov-Fall.

Unitär äquivalent zu U_t ist

$$\tilde{U}_t = \exp(-it\tilde{H}) : \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}, \nu) \rightarrow \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}, \nu)$$

mit

$$\tilde{H} := \begin{pmatrix} z \mapsto \omega_0 z & f \mapsto \langle 1, f \rangle \\ z \mapsto z 1 & f \mapsto M_\omega f \end{pmatrix}, \mathcal{D}(\tilde{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{D}(M_\omega). \quad (3.2)$$

In dieser Darstellung ist die Kopplung wieder frequenzunabhängig, dafür ist allerdings der Hilbertraum der Umgebung durch den $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ mit einem vom Lebesguemaß verschiedenen Maß ν gegeben – also durch einen Hilbertraum,

²Die Dichte $\frac{d\nu}{d\omega}$ des Kopplungsmaßes läßt sich dann als frequenzabhängiger Transmissionskoeffizient des Spiegels interpretieren, der den Hohlraum an die Umgebung koppelt.

³ $|g(\omega)|^2$ ist der frequenzabhängige Transmissionskoeffizient des Spiegels zwischen Resonator und Umgebung.

in dem alle Frequenzen vorkommen, aber unterschiedlich stark gewichtet werden. In dieser Darstellung kann man daher von „weißer Kopplung an farbiges Rauschen“ sprechen.

Das durch U_t (bzw. \tilde{U}_t) beschriebene System ist asymptotisch vollständig, d.h. es existieren unitäre Wellen- und Streuoperatoren (vgl. [5], Abschnitt 5.3).

Während in [5] ausgehend von der positiv definiten Funktion ρ die minimale unitäre Dilatation bestimmt wurde, soll im folgenden die entgegengesetzte Richtung eingeschlagen werden: Gegeben ein selbstadjungierter Hamilton-Operator (z.B. in der Form 3.2), finde die zugehörige Dynamik (insbesondere ρ_t).

Nach Satz 2.11 aus [6] besteht eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen positiv definiten Funktionen ρ_t mit $\rho_0 = 1$ und Paaren (ν, ω_0) bestehend aus einem regulären Borelmaß⁴ ν auf \mathbb{R} und einer reellen Zahl ω_0 . Daher ist insbesondere jeder Hamilton-Operator (3.2) mit endlichem Kopplungsmaß ν Generator einer unitären Dilatation. Ist ν absolutstetig bzgl. des Lebesguemaßes (mit Dichte $|\kappa(\omega)|^2$) so ist die Dilatation unitär äquivalent zur Kopplung an einen Shift (aaO., Abschnitt 5.2).

In diesem Spezialfall ergibt sich U_t auf $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}, \nu)$ für gegebenes Kopplungsmaß $d\nu = \frac{d\nu}{d\omega} d\omega$ wie folgt (vgl. [5], S.90):

$$U_t = \left(\begin{array}{ll} z \mapsto z\rho_t & f \mapsto \langle \Psi_{-t}, f \rangle \\ z \mapsto z\Psi_t & f \mapsto M_{e^{-i\omega t}} \left(f - i \int_0^t e^{i\omega s} \langle \Psi_{-s}, f \rangle ds \right) \end{array} \right). \quad (3.3)$$

Dabei ist die *Umgebungserregung* Ψ_t gegeben durch (aaO, S.87)

$$\Psi_t(\omega) = -i \int_0^t e^{-i\omega(t-s)} \rho_s ds, \quad (3.4)$$

und ρ läßt sich aus ν mittels Laplacetransformation $LT[f](u) := \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt$, $\operatorname{Re} u > 0$ berechnen (aaO, S.83):

$$LT[\rho](u) = \frac{1}{LT[k](u) + u + i\omega_0} \quad \operatorname{Re} u > 0.$$

Dabei ist k , das *Gedächtnis* des Systems, durch die Fouriertransformierte der Dichte des Kopplungsmaßes (aaO, S.69) gegeben:

$$k(s) = \sqrt{2\pi} \operatorname{FT} \left[\frac{d\nu}{d\omega} \right] (s).$$

⁴Ein Maß μ auf einer lokalkompakten Menge X ist *reguläres Borelmaß*, falls gilt: (1) $\mu(K) < \infty \forall X \supset K$ kompakt; (2) für alle A aus der Borel- Σ -Algebra von X gilt: $\mu(A) = \inf \{ \mu(B) : B \supset A, B \text{ offen} \}$ und $\mu(A) = \sup \{ \mu(B) : B \subset A, B \text{ kompakt} \}$.

Damit ergibt sich ρ für gegebenes κ als:

$$\rho_t = \text{LT}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \text{LT}[\text{FT}[|\kappa|^2]](u) + u + i\omega_0} \right](t).$$

$\text{LT}[\rho]$ ist für $\text{Re}u > 0$ holomorph, da $\text{ReLT}[k](u) > 0 \forall \text{Re}u > 0$ (vgl. aaO, S.83).

Nun sind alle in Gl. (3.3) vorkommenden Größen in Abhängigkeit von κ bestimmt.

Für eine einfache Familie von Funktionen – Lorentzkurven –, mit denen der typische Fall eines nur in einem bestimmten Frequenzband um Ω durchlässigen Spiegels qualitativ gut beschrieben werden kann, wird U_t nun explizit berechnet.

Als Durchlässigkeit (Transmissionskoeffizient) des Spiegels wird angesetzt:

$$|\kappa(\omega)|^2 = \kappa_0 \frac{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + (\omega - \Omega)^2}. \quad (3.5)$$

Diese Funktion hat bei $\omega = \Omega$ ein Maximum mit $|\kappa(\Omega)|^2 = \kappa_0 > 0$ und eine Halbwertsbreite von $\Delta\omega > 0$. Es ist $\int_{\mathbb{R}} |\kappa(\omega)|^2 d\omega = \pi\kappa_0\Delta\omega$.

Mit diesem κ folgt:

$$k(s) = \pi\kappa_0 \frac{\Delta\omega}{2} e^{-i\Omega s} e^{-\frac{\Delta\omega}{2}|s|},$$

$$\text{LT}[k](z) = \pi\kappa_0 \frac{\Delta\omega}{2} \frac{1}{z + \frac{\Delta\omega}{2} + i\Omega},$$

$$\text{LT}[\rho](z) = \frac{z + \frac{\Delta\omega}{2} + i\Omega}{z^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2} + i(\Omega + \omega_0)\right)z + \pi\kappa_0 \frac{\Delta\omega}{2} - \omega_0\Omega + i\frac{\Delta\omega}{2}\omega_0}.$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms im Nenner sind gegeben durch

$$z_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega}{2} + i(\omega_0 + \Omega) \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2} + i(\omega_0 - \Omega) \right)^2 - 4\pi\kappa_0 \frac{\Delta\omega}{2}}.$$

Der Wurzelausdruck sei im folgenden mit W bezeichnet.

Die inverse Laplacetransformierte dieser Funktion ist nach ROBERTS, KAUFMAN, *Table of Laplacetransforms*, für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{1}{z_+ - z_-} \left[\left(\frac{\Delta\omega}{2} + i\Omega + z_+ \right) e^{-z_+ t} - \left(\frac{\Delta\omega}{2} + i\Omega + z_- \right) e^{-z_- t} \right] \quad (3.6) \\ &= \frac{1}{W} \left[\left(\frac{\Delta\omega}{2} - i(\omega_0 - \Omega) \right) \sinh\left(\frac{Wt}{2}\right) + W \cosh\left(\frac{Wt}{2}\right) \right] e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{2} + i(\omega_0 + \Omega)\right)t}. \end{aligned}$$

Für $t < 0$ gilt: $\rho_t = \overline{\rho_{-t}}$.

Damit ist die eindimensionale Subdynamik bestimmt, die zu der durch κ beschriebenen Kopplung gehört. Durch Einsetzen von ρ in Gl. (3.4) und dann in die Dynamik (3.3) kann nun die Zeitentwicklung des Gesamtsystems berechnet werden.

Es ist eine offene Frage, ob diesem (im Vergleich zu $z_t = e^{-\frac{\gamma}{2}|t|}$ aus Abschnitt 1.2) sehr komplizierten Ausdruck auch beobachtbare Phänomene entsprechen, die ein Aufgeben der Markov-Näherung nötig machen.

Etwas übersichtlicher wird dieser Ausdruck in den Fällen, in denen W reell oder rein imaginär ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Grundfrequenz ω_0 des Resonators mit der Frequenz maximaler Durchlässigkeit Ω des Spiegel übereinstimmt. Dann ist $W = \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi\kappa_0}{\Delta\omega}} =: \frac{\Delta\omega}{2} X$. Beschreibt κ einen guten Spiegel und einen schlechten Filter, dann ist κ_0 klein und $\Delta\omega$ groß und damit $W \in \mathbb{R}$ ($\Delta\omega > 8\pi\kappa_0$).

Sei nun $X \in \mathbb{R}$, dann läßt sich ρ_t folgendermaßen schreiben:

$$\rho_t = \left(\frac{1+X}{X} e^{-\frac{\Delta\omega}{4}(1-X)t} - \frac{1-X}{X} e^{-\frac{\Delta\omega}{4}(1+X)t} \right) e^{-i\omega_0 t}.$$

Ist $\Delta\omega \gg 8\pi\kappa_0$ so gilt $X \approx 1 - \frac{4\pi\kappa_0}{\Delta\omega}$ und damit $\rho_t \approx \text{const} e^{-\pi\kappa_0 t} e^{-i\omega_0 t}$, d.h. in diesem Grenzfall erhält man wieder das aus Abschnitt 1.2 bekannte Verhalten eines Oszillators mit markovscher Dämpfung.

Ist andererseits $\Delta\omega < 8\pi\kappa_0$, d.h. beschreibt einen guten Filter (scharfer Peak des Transmissionskoeffizienten bei $\Omega = \omega_0$, große Durchlässigkeit), dann ist $i\mathbb{R} \ni W = \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi\kappa_0}{\Delta\omega}} =: i\frac{\Delta\omega}{2} Y$ mit $\mathbb{R} \ni Y = \sqrt{\frac{8\pi\kappa_0}{\Delta\omega} - 1}$. Damit gilt dann für ρ :

$$\rho_t = \left(\frac{1}{Y} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} Y t\right) + \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} Y t\right) \right) e^{-\frac{\Delta\omega}{4} t} e^{-i\omega_0 t}.$$

Als nächster Schritt wären nun die Wellenoperatoren zu berechnen und dann die die Zweitquantisierung mit den Ausdrücken aus Abschnitt 1.2.3 zu vergleichen. Dadurch könnte dann überprüft werden, wie gut die Markov-Näherung für gegebene Kopplung und gegebene Testfunktionen ist. In dieser Arbeit kann das nicht mehr unternommen werden.

3.2 Hohlraumresonator mit mehreren Moden

Eine weitere Einschränkung der bisher besprochenen Modelle ist, daß stets nur die Kopplung eines *eindimensionalen* Systems an das umgebende Feld

betrachtet wurde. In der Regel hat man es jedoch mit mehreren Freiheitsgrade im System zu tun, so daß $\mathcal{H}_{sys} \neq \mathbb{C}$ ist.

In [4] wird gezeigt, daß jede halbgruppenförmige (kontraktive) Zeitentwicklung auf einem Hilbertraum \mathcal{H}_{sys} durch markovsche Kopplung an den $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{sys})$ dilatiert werden kann. Dies steht im Einklang mit der Vorstellung, daß „jeder Freiheitsgrad sein eigenes Wärmebad“ besitzt. Eine direkte Interpretation der durch $L^2(\mathcal{H}_{sys})$ beschriebenen Umgebung als Einteilchenraum des freien elektromagnetischen Feldes ist dann aber u.U. nicht mehr möglich. Will man beispielsweise die beiden möglichen Polarisationsrichtungen R, L berücksichtigen, liegt für den Hamilton-Operator der Ansatz $H_2 := H_R \oplus H_L$ (mit $H_{R,L}$ wie in Gl. (1.11)) nahe. Beide Moden entwickeln sich unabhängig voneinander und werden in „verschiedene Umgebungen“, nämlich das R - bzw. L -polarisierte Feld abgegeben.

Eine andere naheliegende Verallgemeinerung des Hamilton-Operators 1.11 ist z.B., M Moden im Hohlraum zuzulassen und diese weiterhin singular an *einen* $L^2(\mathbb{R})$ zu koppeln. Der Einteilchenraum ist dann $\mathcal{H}^{(M)} := \mathbb{C}^M \oplus L^2(\mathbb{R})$. Nimmt man an, daß die einzelnen Moden im Hohlraum nicht miteinander wechselwirken, so bietet sich der Ansatz

$$H^{(M)} = \left(\begin{array}{cc} z^{(k)} \mapsto \omega_k z^{(k)} & f \mapsto \sqrt{\gamma_k} f(0) \\ z^{(k)} \mapsto \sqrt{\gamma_k} z^{(k)} \delta(x) & f \mapsto -i \frac{d}{dx} f(x) \end{array} \right), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{D}(H^{(M)}) = \left\{ \left(\begin{array}{c} z^{(k)} \\ f \end{array} \right) \in \mathcal{H}^{(M)} : f|_{\mathbb{R}^\pm} \in W^1(\mathbb{R}^\pm) \text{ und } f(0^+) - f(0^-) = -i \sum_k \sqrt{\gamma_k} z^{(k)} \right\}$$

für den Hamilton-Operator an. Aufgrund der Randbedingung entwickeln sich die verschiedenen Moden im Hohlraum nicht unabhängig voneinander. Ihre Zeitentwicklung wird nicht mehr durch einfachen exponentiellen Zerfall beschrieben.

Die Schrödingergleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\begin{array}{c} z^{(k)} \\ f \end{array} \right) = -i H^{(M)} \left(\begin{array}{c} z^{(k)} \\ f \end{array} \right)$$

zur Anfangsbedingung $\left(\begin{array}{c} z_0^{(k)} \\ f_0 \end{array} \right) \in \mathcal{D}(H^{(M)})$ wird gelöst durch

$$f_t(x) = (S_{t-t_0} f_0)(x) - i \sum_k \sqrt{\gamma_k} z_{t-x}^{(k)} \chi_{[0, t-t_0]}(x)$$

und $z_t^{(k)}$, die die folgende, langevinartige Gleichung erfüllen

$$\frac{d}{dt} z_t^{(k)} = -i \omega_k z_t^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_l \sqrt{\gamma_k \gamma_l} z_t^{(l)} - i \sqrt{\gamma_k} f_0(t_0 - t).$$

In Matrixschreibweise lautet diese Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}_t = -A \vec{z}_t - i \vec{\kappa} f_0(t_0 - t),$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} & \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} & \cdots & \sqrt{\gamma_1 \gamma_M} \\ \sqrt{\gamma_2 \gamma_1} & 2\lambda_2 & \sqrt{\gamma_2 \gamma_3} & \cdots & \sqrt{\gamma_2 \gamma_M} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \sqrt{\gamma_M \gamma_1} & & & & 2\lambda_M \end{pmatrix},$$

$\lambda_k = i\omega_k + \frac{\gamma_k}{2}$ und

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\gamma_M} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$\vec{z}_t = e^{-A(t-t_0)} \vec{z}_0 - \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} \vec{\kappa} f_0(t_0 - s) ds.$$

Die Matrix A ist nicht selbstadjungiert (und für $\omega_i \neq \omega_k$ auch nicht normal) und daher im allgemeinen nicht diagonalisierbar.

Der Hohlraumresonator mit zwei Moden

Im Falle $M = 2$ hat A die Eigenwerte $\mu_{1/2} = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \gamma_1 \gamma_2})$ und besitzt zwei (für $\lambda_k \notin \mathbb{R}$ zueinander nicht orthogonale) Eigenvektoren $e_1 = (\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}, \lambda_2 - \lambda_1 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \gamma_1 \gamma_2})$ und $e_2 = (\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}, \lambda_2 - \lambda_1 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \gamma_1 \gamma_2})$.

Mit \hat{e}_l seien jetzt die normierten Eigenvektoren bezeichnet. Sei $\vec{\kappa} = k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2$ und $\vec{z}_t = x_t \hat{e}_1 + y_t \hat{e}_2$. Dann gilt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \vec{z}_t &= \left(e^{-\mu_1 t} x_0 - i k_1 \int_0^t e^{-\mu_1(t-s)} f_0(-s) ds \right) \hat{e}_1 \\ &\quad + \left(e^{-\mu_2 t} y_0 - i k_2 \int_0^t e^{-\mu_2(t-s)} f_0(-s) ds \right) \hat{e}_2 \\ f_t(x) &= (S_t f_0)(x) - i \left(e^{-\mu_1(t-x)} \overline{k_1} x_0 + e^{-\mu_2(t-x)} \overline{k_2} y_0 \right) \chi_{[0,t]}(x) \\ &\quad - \int_0^{t-x} \left(e^{-\mu_1(t-x-s)} |k_1|^2 + e^{-\mu_2(t-x-s)} |k_2|^2 \right) f_0(-s) ds \chi_{[0,t]}(x). \end{aligned}$$

Zusammenfassung und Ausblick

Zwei exemplarische quantenoptische Systeme – der Hohlraumresonator und der parametrische Resonator – konnten im Rahmen plausibler Modellannahmen durch eine quasifreie Dynamik auf der CCR-Algebra beschrieben werden.

Beide Modelle sind im Sinne der Streutheorie asymptotisch vollständig, so daß ferne Zukunft und ferne Vergangenheit über den Streuoperator in Beziehung stehen. Dies ermöglicht die Ableitung von Input-Output-Beziehungen, die den Einfluß des „Streutargets“ auf den Input zusammenfassen.

Durch Übergang in die Fockdarstellung konnten die aus der physikalischen Literatur bekannten Gleichungen für die Feldoperatoren auf dem Fockraum reproduziert werden. Man mußte sich jedoch nicht auf diese Darstellung beschränken, sondern konnte auch Erwartungswerte in nicht fock-normalen Zuständen (wie den Temperaturzuständen oder makroskopisch angeregten kohärenten Zuständen) berechnen.

Es ist naheliegend, zu fragen, ob sich noch weitere Bestandteile quantenoptischer Versuchsaufbauten (wie z.B. Strahlteiler, Schichten von Dielektrika, Filter und Interferometer) auf diese Art behandeln lassen. Sofern dies der Fall ist, ließe sich dann ein ganzes Experiment aus seinen Bestandteilen zusammensetzen, indem jeweils der Output eines Bestandteils als der Input des nächsten behandelt wird. Auf diese Weise könnte man eine operatoralgebraische Beschreibung komplizierterer zusammengesetzter Systeme finden.

Dabei wird man sich nicht auf die (hier ausschließlich betrachteten) eindimensionalen Subsysteme beschränken können. In [4] wird jedoch mit den unitären Dilatationen beliebiger Halbgruppen eine große Zahl möglicher quasifreier Dynamiken zur Verfügung gestellt, die auf ihre physikalische Anwendbarkeit hin zu untersuchen wären.

Der Ansatz einer *quasifreien* Dynamik stellt eine große Vereinfachung, aber auch eine starke Einschränkung dar; insbesondere kann die Wechselwirkung mit Materie nur phänomenologisch behandelt werden (wie der Spiegel in Kapitel 1 und der nichtlineare Kristall in Kapitel 2). Will man aber z.B. die Wechselwirkung eines Atoms mit dem Feld des Hohlraums beschreiben oder auch den parametrischen Resonator mit korrekt quantenmechanisch behandeltem Pumpstrahl, so muß man die quasifreie Beschreibung aufgeben. Sowohl Streutheorie als auch die Theorie der Dilatationen (als Einbettung der Dynamik eines kleinen Systems in eine große Umgebung) können auf den nicht-quasifreien Fall verallgemeinert werden: siehe KÜMMERER, MAASSEN, *The Scattering Theory of Generalized Markov Chains*, Preprint Tübingen,

1996. Mit diesen Ergebnissen könnte die Formulierung eines Input-Output-Formalismus für nicht quasifreie Systeme der Quantenoptik versucht werden.

Zum Abschluß sei noch eine Frage angeschnitten, die mir besonders reizvoll erscheint, aber im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr bearbeitet werden konnte.

An einigen Beispielen wurde gezeigt, daß die Streuung am Hohlraum bzw. am parametrischen Resonator dazu führen kann, daß einlaufende und auslaufende Zustände disjunkt voneinander sind.

Man könnte jetzt untersuchen, ob es Input-Zustände φ_1, φ_2 gibt, die zunächst nicht disjunkt sind, aber durch die Streuung disjunkt voneinander werden. In diesem Fall findet man eine Darstellung von $CCR(\mathcal{H})$, die ein nicht-triviales Zentrum besitzt und Observable in diesem Zentrum, deren Messung es erlaubt, die Output-Zustände $\nu_S(\varphi_1)$ und $\nu_S(\varphi_2)$ zu unterscheiden.

Da die Elemente des Zentrums mit allen Observablen vertauschen, entspricht die Messung einer Zentrumsobservablen einer *klassischen Messung*, die den Zustand des Systems nicht beeinflusst.

Die Streuung hätte also im beschriebenen Fall die quantenmechanischen Unterschiede zwischen den Zuständen $\varphi_{1,2}$ auf den klassischen Level vergrößert und könnte daher als ein Modell für den Meßprozeß angesehen werden. Es ist jedoch anzunehmen, daß zu diesem Zweck ein größeres Teilsystem (vermutlich mit unendlichdimensionalem Einteilchenraum) zu betrachten ist.

Anhang A

Die CCR-Algebra

Da die gebräuchlichen Definitionen der Weylrelationen, Feldoperatoren, Glaubervektoren usw. nur „modulo Vorfaktor“ übereinstimmen, scheint es angebracht, hier die in dieser Arbeit verwendeten Konventionen zusammenzustellen.

Symplektische Räume

Ein reeller Vektorraum \mathcal{H} wird als *symplektischer Raum* bezeichnet, wenn es eine Bilinearform σ auf \mathcal{H} gibt, für die gilt: $\sigma(f, g) = -\sigma(g, f) \forall f, g \in \mathcal{H}$. Man nennt σ die *symplektische Form*. Die symplektische Form heißt *nicht-entartet*, falls $\sigma(f, g) = 0 \forall g \Rightarrow f = 0$. Standardbeispiel für einen (nichtentarteten) symplektischen Raum ist ein komplexer Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem Imaginärteil des Skalarprodukts als symplektischer Form.

Die CCR-Algebra

Die *Weyloperatoren* $W(f) : f \in \mathcal{H}$ sind unitäre Operatoren, die $\forall f, g \in \mathcal{H}$ die *kanonischen Vertauschungsrelationen*

$$W(f)W(g) = e^{i\sigma(f,g)}W(f+g) = e^{i2\sigma(f,g)}W(g)W(f) \quad (\text{A.1})$$

erfüllen und für die gilt $W(f)^* = W(-f) \forall f \in \mathcal{H}$.

Die *Algebra der kanonischen Vertauschungsrelationen* (auch: CCR- oder Weyl-Algebra) $\text{CCR}(\mathcal{H}, \sigma)$ über dem symplektischen Raum (\mathcal{H}, σ) ist die von den $W(f)$ mit $f \in \mathcal{H}$ erzeugte C^* -Algebra.

Nach dem Satz von SLAWNY existiert $\text{CCR}(\mathcal{H}, \sigma)$ für jeden symplektischen Raum und ist für jede nichtentartete symplektische Form eindeutig bis auf C^* -Isomorphismen.

Der Raum \mathcal{H} wird als *Einteilchen-* oder *Testfunktionenraum* bezeichnet.

Zustände auf der CCR-Algebra

Ein Zustand φ auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ ist ein normiertes positives lineares Funktional auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$. Die Menge der Zustände auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ sei mit $\mathcal{S}(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ bezeichnet.

Ein Zustand φ auf der CCR-Algebra $\text{CCR}(\mathcal{H})$ ist eindeutig bestimmt durch sein *charakteristisches Funktional*, d.h. die Abbildung

$$C_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad f \mapsto \varphi(W(f)).$$

Ein Funktional $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann charakteristisches Funktional eines Zustands auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$, wenn $C(0) = 1$ und die Abbildung $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (f, g) \rightarrow C(f - g)e^{i\sigma(f, g)}$ ein positiv definiten Kern ist, d.h. falls gilt $\sum_{j, k=1}^n c_j \bar{c}_k K(f_k, f_j) \geq 0 \quad \forall f_k \in \mathcal{H}, c_k \in \mathbb{C}$. (vgl. [10], S. 18)

Ein Zustand φ heißt *regulär*, wenn die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \rightarrow C_\varphi(tf)$ für alle $f \in \mathcal{H}$ stetig ist.

Er heißt *analytisch*, wenn $\mathbb{R} \ni t \rightarrow C_\varphi(tf)$ für alle $f \in \mathcal{H}$ analytisch ist.

Ein Zustand heißt *quasifrei*, wenn sein charakteristisches Funktional durch $C_\varphi(f) = \exp(-\frac{1}{2}B(f, f) + iL(f))$ mit einer reell-linearen Abbildung $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ und einer positiven symmetrischen reell-bilinearen Form B gegeben ist, und für alle $f, g \in \mathcal{H}$ gilt: $\sigma(f, g)^2 \leq B(f, f)B(g, g)$.

Der *Fockzustand* φ_F ist der Zustand mit dem charakteristischen Funktional $C_{\varphi_F}(f) = \exp(-\frac{1}{2}\|f\|^2)$. In der Fockdarstellung wird φ_F auch mit $|0\rangle$ bezeichnet.

Der *Teilchenzahlzustand* $(n)_g$ beschreibt ein System, in dem n Teilchen in der Mode g , $\|g\| = 1$ vorliegen. Dargestellt als Element des Fockraums $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ ist $|(n)_g\rangle = g \otimes \cdots \otimes g$ (n Faktoren). Das charakteristische Funktional von $|(n)_g\rangle$ ist

$$C_{(n)_g}(f) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} |\langle g, f \rangle|^{2k}. \quad (\text{A.2})$$

Der *Glauberzustand* $e(g)$ zu einer Testfunktion g ist der reine, quasifreie und analytische Zustand mit dem charakteristischen Funktional

$$C_{e(g)} : f \mapsto e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2 + i2\text{Im}\langle g, f \rangle}. \quad (\text{A.3})$$

In der Fockdarstellung geht der Glauberzustand $e(g)$ aus dem Fockzustand $|0\rangle$ durch Anwendung des (dargestellten) Weyloperators $W(g)$ hervor:

$$|e(g)\rangle = W(g)|0\rangle.^1 \text{ Unter Verwendung von Gl. (A.1) folgt } W(g)|e(f)\rangle =$$

¹RIECKERS und HONEGGER definieren Glauberzustand ein wenig anders: bei ihnen ist $|e(g)\rangle = W(-i\sqrt{2}g)|0\rangle$. Daher tritt dort dann auch der *Realteil* des Skalarprodukts im charakteristischen Funktional auf. Siehe Zusammenstellung zur Notation im Anhang von [12].

$e^{i\sigma(f,g)} |e(f+g)\rangle$. $W(g)$ wird in der Quantenoptik auch als *Verschiebeoperator* (*displacement operator*) bezeichnet.

In der Teilchenzahlbasis ist $e(g)$ durch den Vektor

$$|e(g)\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|g\|^2} \bigoplus_n (\otimes_{k=1}^n g)$$

gegeben (wobei $\otimes_{k=1}^n g = g \otimes g \otimes \cdots \otimes g$ (n Faktoren)). Die Glaubervektoren sind total in $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$. Im Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ werden die Glaubervektoren zur Testfunktion $\alpha \in \mathbb{C}$ oft mit $|\alpha\rangle$ bezeichnet.

Zwei Zustände φ, ψ auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ heißen *disjunkt*, falls die zugehörigen GNS-Darstellungen $\pi_\varphi(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ und $\pi_\psi(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ keine äquivalenten Unterdarstellungen besitzen.

Sie heißen *äquivalent* (manchmal auch *quasiäquivalent*) falls $\pi_\psi(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ äquivalent zu einer Unterdarstellung von $(\oplus_n \pi_\varphi)(\text{CCR}(\mathcal{H}))$ ist und umgekehrt.

Zwei quasifreie Zustände auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$ sind entweder disjunkt oder äquivalent. Sind ihre Bilinearformen $\alpha(x, x) = \langle Ax, x \rangle, \beta(x, x) = \langle Bx, x \rangle$, so sind die Zustände genau dann äquivalent, wenn für die Operatoren A, B gilt: $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ und $\sqrt{1-A} - \sqrt{1-B}$ sind Hilbert-Schmidt-Operatoren².

Feldoperatoren, Erzeuger und Vernichter

(Anm.: die im Folgenden eingeführten Objekte können meist unter noch etwas allgemeineren Voraussetzungen definiert werden; vgl. z.B. [10].)

Sei \mathcal{H} ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und symplektischer Form $\sigma(\cdot, \cdot)$. Sei φ ein analytischer Zustand auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$. Dann ist in der GNS-Darstellung π_φ zu φ für jedes $f \in \mathcal{H}$ der *Feldoperator* $\Phi(f)$ definiert als der selbstadjungierte Generator der unitären Gruppe $\pi_\varphi(W(tf))$ auf dem GNS-Hilbertraum \mathcal{H}_φ , d.h. $\Phi_\varphi(f)$ ist gegeben durch

$$\Phi_\varphi(f)\eta := -i \frac{\partial}{\partial t} \pi_\varphi(W(tf))\eta \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_\varphi \quad (\text{A.4})$$

Die Feldoperatoren (und auch alle endlichen Produkte von Feldoperatoren) sind auf einem gemeinsamen dichten Teilraum des Darstellungshilbertraums definiert. Es gilt

$$[\Phi(f), \Phi(g)] = -i2\sigma(f, g).$$

² $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls $\text{tr}(AA^\dagger) < \infty$.

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $A^\dagger(f)$, $A(f)$ sind definiert durch

$$A^\dagger(f) := \frac{1}{2} (\Phi(f) - i\Phi(if)) \quad (\text{A.5})$$

$$A(f) := \frac{1}{2} (\Phi(f) + i\Phi(if)). \quad (\text{A.6})$$

Sie erfüllen auf einem dichten Definitionsbereich die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [A(f), A(g)] &= 0 = [A^\dagger(f), A^\dagger(g)] \\ [A(f), A^\dagger(g)] &= \sigma(if, g) - i\sigma(f, g). \end{aligned}$$

Wählt man nun als symplektische Form den negativen Imaginärteil des Skalarprodukts $\sigma(\cdot, \cdot) := -\text{Im}\langle \cdot, \cdot \rangle$ so gilt die Vertauschungsrelation in der üblichen Form

$$[A(f), A^\dagger(g)] = \langle f, g \rangle. \quad (\text{A.7})$$

Die in der Quantenoptik gebräuchlichen Observablen sind nicht die Weyl-Operatoren, sondern meist Polynome in den Erzeugern und Vernichtern. Daher sind folgende Lemmata nützlich, die die Bestimmung eines Zustands direkt durch die Erwartungswerte solcher Observablen gestatten:

Lemma A.1 (Bestimmung analytischer Zustände; Satz 3.1.2 aus [14])

Ein analytischer Zustand ist eindeutig bestimmt durch die Erwartungswerte der normalgeordneten Produkte $\prod_{k=1}^n A^\dagger(f_k) \prod_{l=1}^m A(g_l)$ von Erzeugern und Vernichtern.

Die Erwartungswerte von Monomen in den Erzeugern und Vernichtern werden auch als *Korrelationsfunktionen* des elektromagnetischen Feldes bezeichnet.

Lemma A.2 (Bestimmung quasifreier Zustände; [10], Gl. 3.8)

Ein quasifreier Zustand mit beschränkter Bilinearform B und Linearform $L \equiv 0$ ist schon durch die Erwartungswerte aller Produkte von zwei Feldoperatoren eindeutig bestimmt. Es ist

$$\varphi(\Phi(f)\Phi(g)) = B(f, g) - i\sigma(f, g)$$

und alle weiteren Korrelationsfunktionen lassen sich auf diese zurückführen.

Kohärente Zustände (zu denen insbesondere die Glauberzustände gehören) sind analytische Zustände, die durch eine Faktorisierungseigenschaft der normalgeordneten Korrelationsfunktionen definiert sind. Für sie gilt:

Es gibt ein lineares Funktional $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, so daß

$$\varphi(\prod_{k=1}^n A^\dagger(f_k) \prod_{l=1}^m A(g_l)) = \prod_{k=1}^n L(f_k) \prod_{l=1}^m \overline{L(g_l)}.$$

Für Glauberzustände ist $L(f) = -i\sqrt{2}\langle g, f \rangle$.³ Eine gründliche Untersuchung und Klassifikation kohärenter Zustände findet sich in [14].

Symplektische Abbildungen und Bogoliubov-Transformationen

Eine (komplex- oder nur reell-) lineare Abbildung T auf \mathcal{H} heißt *symplektisch*, falls T die symplektische Form erhält, d.h. falls gilt

$$\sigma(Tf, Tg) = \sigma(f, g) \quad \forall f, g, \in \mathcal{H}.$$

In ([13], I) werden einige nützliche Zerlegungen symplektischer Abbildungen angegeben.

Jede symplektische Abbildung auf einem Hilbertraum \mathcal{H} läßt sich eindeutig als Summe einer komplex-linearen und einer komplex-antilinearen Abbildung schreiben:

$$T = T_l + T_a.$$

Außerdem existiert eine „Polarzerlegung“ der Form

$$T = \cosh S + J \sinh S,$$

wobei S ein selbstadjungierter linearer Operator und J eine antilineare Involution ist. Seien nun P_{\pm} die Projektionen auf die beiden Eigenräume von J (zu den Eigenwerten ± 1), dann gilt:

$$T = e^S P_+ + e^{-S} P_-.$$

Interessant ist vor allem folgender Satz über *symplektische Gruppen*.

Satz A.1 (Stark stetige symplektische Gruppen, Theorem 2.10 aus [13], I)
 Sei T_t eine stark stetige symplektische Gruppe auf \mathcal{H} , mit exponentiell beschränktem Wachstum ($\|T_t\|^2 \leq \exp(\beta|t|) \forall t \in \mathbb{R}$ für ein $\beta > 0$), dann existieren eindeutige Operatoren $C = C^\dagger$ linear und $D = D^\dagger$ antilinear und beschränkt, so daß gilt

$$T_t = e^{(iC+D)t}.$$

Seien umgekehrt $C = C^\dagger, D = D^\dagger$ wie oben, dann ist $T_t := \exp((iC+D)t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine stark stetige symplektische Gruppe und $\forall t \in \mathbb{R}$ ist $\|T_t\|^2 \leq \exp(\|D\| |t|)$.

³Wären Glauberzustände und symplektische Form wie in [13, 15, 14, 12] definiert worden, so wäre $L_{\text{Glauber}}(f) = \langle g, f \rangle$.

Jede symplektische Abbildung T auf \mathcal{H} definiert über

$$\alpha_T(W(f)) := W(Tf)$$

eindeutig einen C^* -Algebra-Automorphismus α_T , die zu T gehörige *Bogoliubov-Transformation*.

In einer geeigneten Darstellung von $CCR(\mathcal{H})$ ergibt sich das Transformationsverhalten der Feldoperatoren, Erzeuger und Vernichter unter α_T als

$$\alpha_T(\Phi(f)) := \Phi(Tf),$$

$$\alpha_T(A(f)) := A(T_l f) + A^\dagger(T_a f),$$

$$\alpha_T(A^\dagger(f)) := A^\dagger(T_l f) + A(T_a f).$$

Bogoliubov-Transformationen werden auch als *quasifreie* Transformationen bezeichnet. Die Menge der quasifreien Zustände wird von den quasifreien Transformationen invariant gelassen.

Lemma A.3 (ν_T auf quasifreien Zuständen)

Sei T eine symplektische Transformation auf \mathcal{H} . Ein quasifreier Zustand φ wird von ν_T wieder auf einen quasifreien Zustand abgebildet. Umgekehrt ist das Urbild eines quasifreien Zustands unter ν_T ebenfalls quasifrei.

Beweis: Das charakteristische Funktional eines quasifreien Zustands φ ist genau von der Form

$$C_\varphi(f) = e^{-\frac{1}{2}B(f,f) + iL(f)}.$$

Dabei sind L, B reell-lineare Abbildungen mit $L: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ und positivem und symmetrischem $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft (vgl. [10], Theorem 3.4)

$$B(f, f)B(g, g) \geq \sigma(f, g)^2 \forall f, g \in \mathcal{H}. \quad (*)$$

Der transformierte Zustand $\nu_T(\varphi)$ wird dann durch $B_T: (f, g) \mapsto B(Tf, Tg)$ und $L_T: f \mapsto L(Tf)$ beschrieben. Da T die symplektische Form erhält, hat B_T wie B die Eigenschaft $(*)$ und folglich ist auch $\nu_T(\varphi)$ quasifrei. Die Umkehrung folgt, da ν_T invertierbar ist. ■

Anhang B

Einteilchendynamik im Frequenzbild

Gelegentlich ist es günstig, die Operatoren aus Abschnitt 1.2 im *Frequenzbild*¹ zu betrachten, d.h. im Hilbertraum der Umgebung durch $f \mapsto \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx$ Fourierbild zu gehen. Der fouriertransformierte Hamiltonian ist:

$$H = \begin{pmatrix} z \mapsto \omega_0 z & f \mapsto \langle \kappa, f \rangle \\ z \mapsto \kappa z & f \mapsto M_{id} f \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

In der Markov-Näherung ist $\kappa = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}$; dann ist H auf dem dichten Teilraum

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ und } \kappa z + M_{id} f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

definiert.

Die Schrödinger-Gleichung $i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$ wird für $t > t_0$ gelöst durch:

$$\begin{aligned} z_t &= e^{-\lambda(t-t_0)} z_{t_0} - i\sqrt{\gamma} \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \check{f}_{t_0}(t-s) ds \\ f_t(\omega) &= i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{e^{-i\omega(t-t_0)} - e^{-\lambda(t-t_0)}}{i\omega - \lambda} z_{t_0} \\ &\quad + e^{-i\omega(t-t_0)} f_{t_0}(\omega) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^t \frac{e^{-i\omega(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)}}{i\omega - \lambda} \check{f}_{t_0}(t-s) ds \end{aligned}$$

¹Korrekt wäre die Bezeichnung als „Wellenzahlbild“, aber im Eindimensionalen und mit den Einheiten $c = \hbar = 1$ gilt Wellenzahl = Frequenz.

und für $t < t_1$ durch:

$$\begin{aligned}
 z_t &= e^{\bar{\lambda}(t-t_1)} z(t_1) + i\sqrt{\gamma} \int_t^{t_1} e^{\bar{\lambda}(t-s)} \check{f}_{t_1}(t_1 - s) ds \\
 f_t(\omega) &= i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{e^{-i\omega(t-t_1)} - e^{\bar{\lambda}(t-t_1)}}{i\omega + \bar{\lambda}} z_{t_1} \\
 &\quad + e^{-i\omega(t-t_1)} f_{t_1}(\omega) - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{t_1} \frac{e^{-i\omega(t-s)} - e^{\bar{\lambda}(t-s)}}{i\omega + \bar{\lambda}} \check{f}_{t_1}(t_1 - s) ds
 \end{aligned}$$

Der Zeitentwicklungsoperator lautet also:

$$U_{t>0} = \left(\begin{array}{cc} z \mapsto e^{-\lambda t} z & f \mapsto -i\sqrt{\gamma} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \check{f}(-s) ds \\ z \mapsto i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t} - e^{-\lambda t}}{i\omega - \lambda} z & f \mapsto M_{e^{-i\omega t}} f + \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{e^{-i\omega(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)}}{i\omega - \lambda} \check{f}(-s) ds \end{array} \right), \quad (\text{B.2})$$

$$U_{t<0} = \left(\begin{array}{cc} z \mapsto e^{\bar{\lambda} t} z & f \mapsto i\sqrt{\gamma} e^{\bar{\lambda} t} \int_t^0 e^{-\bar{\lambda} s} \check{f}(-s) ds \\ z \mapsto i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t} - e^{\bar{\lambda} t}}{i\omega + \bar{\lambda}} z & f \mapsto M_{e^{-i\omega t}} f - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_t^0 \frac{e^{-i\omega(t-s)} - e^{\bar{\lambda}(t-s)}}{i\omega + \bar{\lambda}} \check{f}(-s) ds \end{array} \right). \quad (\text{B.3})$$

Die Wellenoperatoren und der Streuoperator sind dann gegeben durch:

$$\widehat{W}_+ : \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \mapsto -i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)} z + f(\omega) - \frac{\gamma}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)} \widehat{f\check{\chi}_{\mathbb{R}^-}}, \quad (\text{B.4})$$

$$\widehat{W}_- : \begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix} \mapsto -i\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega - \omega_0)} z + f(\omega) - \frac{\gamma}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega - \omega_0)} \widehat{f\check{\chi}_{\mathbb{R}^+}} \quad (\text{B.5})$$

und

$$\hat{S} : f \mapsto \frac{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} f. \quad (\text{B.6})$$

Bezeichnungen:

$\text{CCR}(\mathcal{H})$	Weylalgebra über dem symplektischen Raum \mathcal{H}
$\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$	symmetrischer Fockraum über \mathcal{H}
$\mathcal{S}(\mathcal{A})$	Zustandsraum über der Algebra \mathcal{A}
$W(f)$	Weyloperator zur Testfunktion f
$\Phi(f)$	Feldoperator zur Testfunktion f
$A(f), A^\dagger(f)$	Vernichter/Erzeuger zur Testfunktion f
φ, ω, \dots	Zustände auf $\text{CCR}(\mathcal{H})$
C_φ, \dots	charakteristisches Funktional des Zustands φ
$\mathcal{H}, \mathcal{K}, \dots, \mathcal{N}, \dots$	Hilberträume
A, \dots, T, U, \dots	lineare Operatoren auf einem Hilbertraum
T^\dagger	der zu T adjungierte Operator
$\mathcal{D}(H)$	Definitionsbereich des Operators H
$L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$	Hilbertraum der quadratintegriblen Funktionen über \mathbb{R} mit Werten in \mathcal{H}
$S(\mathbb{R})$	Raum der schnellfallenden Funktionen auf \mathbb{R}
S_t	Rechtsshift um t Einheiten auf $L^2(\mathbb{R})$
$\widehat{f}(\omega)$	$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx$ (Fouriertransformierte von f)
W_\pm, Ω_\pm	Wellenoperatoren
$\chi_I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	charakteristische Funktion des Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$.
δ_x	Delta-Distribution an der Stelle $x \in \mathbb{R}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	komplexes Skalarprodukt, linear in der zweiten Komponente
$\sigma(\cdot, \cdot)$	symplektische Form
\mathbb{H}	Hamilton-Operator auf dem Fockraum
$\begin{pmatrix} z \\ f \end{pmatrix}$	Vektoren aus $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$
$\kappa_k \in \mathbb{C}$	Transmissionskoeffizient des k ten Spiegels aus Kapitel 1, 2
$\gamma_k \in \mathbb{R}$	$ \kappa_k ^2$
$\lambda \in \mathbb{C}$	$i\omega_0 + \gamma/2$
$\text{supp} f$	Trägermenge der Funktion f

Literaturverzeichnis

- [1] GARDINER, C.W., *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [2] WALLS, D.F., MILBURN, G.W., *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- [3] GARDINER, C.W., COLLET, M.J., *Input and Output in damped quantum systems...* Phys. Rev. A, **31**, 6 (1985)
- [4] KÜMMERER, B., SCHRÖDER, W.,
I: *A new construction of unitary dilations: singular coupling to White Noise*, in: Accardi, L. und v. Waldenfels, W. (Hrsg.) *Quantum Probability and Applications II*, Proc. Heidelberg, 1984, Springer Lecture Notes in Mathematics 1136, Berlin, 1985
II: *Unitary Dilations as Singular Couplings to White Noise*, Semesterberichte Funktionalanalysis, Tübingen, Sommer 1984
- [5] EPPLE, M., *Kopplungsdilatationen eindimensionaler offener Quantensysteme*, Diplomarbeit, Tübingen, 1987
Semesterberichte Funktionalanalysis, **11**, Tübingen, Winter 1986/87
- [6] EPPLE, M., *Coupling Dilatations of positive definite functions*, Preprint, Tübingen, 1987
- [7] RUPP, C., *Ein quantenstochastischer Kalkül für die Zustände des Squeezed White Noise in der Quantenoptik*, Diplomarbeit, Tübingen, 1991
- [8] LAX, P.D., PHILLIPS, R.S., *Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1967
- [9] REED, M., SIMON, B., *Scattering Theory*, Academic Press, New York,
- [10] PETZ, D., *An invitation to the Algebra of Canonical Commutation Relations*, Leeuwen University Press, 1990

- [11] MANDEL, L., WOLF, E., *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995
- [12] PEECK, J., *Physikalische Grundlagen der „gequetschten“ Lichtzustände*, Diplomarbeit, Tübingen, 1993
- [13] RIECKERS, A., HONEGGER, R.,
I: Squeezing Bogoliubov Transformations on the Infinite Mode CCR-Algebra, J. Math. Phys, **37**, 9 4292ff, (1996) und
II: Squeezing of Optical States on the CCR-Algebra, III: Squeezing Operations in Fockspace and Beyond, IV: Squeezed Variances of Smeared Boson Fields, Preprints Tübingen, 1995
- [14] RAPP, A., *Kohärente Zustände auf der Photonen-Weylalgebra*, Diplomarbeit, Tübingen, 1988
- [15] HONEGGER, R., *Globale Quantentheorie der Strahlung*, Dissertation, Tübingen, 1991
- [16] HONEGGER, KÜMMERER, RIECKERS, RUPP, *The Quantum Stochastic Calculus of Classical and Non-Classical Squeezed White Noise*, Preprint, Tübingen, 1996